

$B$ -самосопр.

$$BB^{-1} \stackrel{!}{=} B^{-1}B.$$

Соб. значения

$e_1, \dots, e_n$ , соб. значения  $b_1, \dots, b_n$

$$BB^{-1}e_i = B \begin{cases} 1/b_i e_i, & b_i \neq 0 \\ 0 & \end{cases} = \begin{cases} 1/b_i B e_i \\ 0 & \end{cases} = \begin{cases} 1/b_i b_i e_i \\ 0 & \end{cases}, b_i \neq 0 =$$

$$= \begin{cases} e_i, & b_i \neq 0 \\ 0, & b_i = 0 \end{cases}$$

$$B^{-1}B e_i = B^{-1} b_i e_i = b_i B^{-1} e_i = \begin{cases} b_i \frac{1}{b_i} e_i, & b_i \neq 0 \\ 0 & \end{cases}, b_i \neq 0 = \begin{cases} e_i, & b_i \neq 0 \\ 0, & b_i = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}$  — оператор  $\Sigma^{-1/2}$   $\mathcal{D}^* \stackrel{\text{def}}{=} A^* \Sigma^{-1/2}$

$\Sigma^{-1/2}$  — имеет то же  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  и  $\Sigma^{-1}$  на

$\cos$ ,  $\sin$  —

$$\mathcal{D} = (A^* \Sigma^{-1/2})^* = \Sigma^{-1/2} A$$

$$(\mathcal{D}^* \mathcal{D} + F^{-1})^{-1} \xrightarrow{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} ?$$

$$Z \leq Y \stackrel{\text{def}}{=} Y - Z$$

$Y - Z$  — неогр. оператор

$$\mathcal{D}^* \mathcal{D} + f_{\min}^{-1} I \leq \mathcal{D}^* \mathcal{D} + F^{-1} \leq \mathcal{D}^* \mathcal{D} + f_{\max}^{-1} I$$

$$f_{\min}^{-1} \text{ и } f_{\max}^{-1}$$

— минимальное и максимальное  $\cos$ ,  $\sin$   $F^{-1}$

$$\left( \mathcal{D}^* \mathcal{D} + \underbrace{f_{\max}^{-1}}_{\omega} \mathbb{I} \right)^{-1} \leq \left( \mathcal{D}^* \mathcal{D} + F^{-1} \right)^{-1} \leq \left( \mathcal{D}^* \mathcal{D} + \underbrace{f_{\min}^{-1}}_{\omega} \mathbb{I} \right)^{-1}$$

$$\text{a.p. } \|F^{-1}\| \rightarrow 0 \quad f_{\min}^{-1}, f_{\max}^{-1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} \left( \mathcal{D}^* \mathcal{D} + F^{-1} \right)^{-1} = \lim_{\omega \rightarrow +0} \left( \mathcal{D}^* \mathcal{D} + \omega \mathbb{I} \right)^{-1} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +0} \left( \frac{\mathbb{I} - (\mathcal{D}^* \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}^* \mathcal{D}}{\omega} + (\mathcal{D}^* \mathcal{D})^{-1} \right)$$

$$\lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow +\infty} U(D^*D + F^{-1})^{-1} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega} U(I - (D^*D)^{-1} D^*D) + U(D^*D)^{-1}$$

$$\text{For } \text{range } \exists \Leftrightarrow U(I - (D^*D)^{-1} D^*D) = 0$$

$$(D^*D)^{-1} D^*D = D^*D$$

$$U(I - D^*D) = 0 \quad (I - D^*D) = \prod_{\lambda(D)}$$

$$D = \Sigma^{-1/2} A$$

$$\forall x \in \mathcal{N}(D) \Rightarrow Ux = 0$$

$$x \in \mathcal{N}(D) \Leftrightarrow Dx = 0 \Leftrightarrow \Sigma^{-1/2} Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(A)$$

Поэтому  $x \in N(D) \Leftrightarrow x \in N(A) : N(D) = N(A)$

Значит  $\Pi_{N(D)} = \Pi_{N(A)}$ , т.е.

$$(I - DD^*) = (I - A^*A)$$

$$\lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} \| \hat{u}_t - u_t \|^2 = \lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} U (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} U \xrightarrow{\|F^{-1}\| \rightarrow 0}$$

$$\lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} U (D^* D)^{-1} U^* = \lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} U (A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} U^* \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

слова

$$U (I - A^* A) = 0$$

при  $\infty$

Условие конечности  
(ограниченности) ср. ил. обкл.  
оценки при  $\|F^{-1}\| \rightarrow 0$

Оценка имеет смысл, только если ср. ил. обкл.  $< \infty$

$$\hat{U}f = Uf_0 + U(A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} A^* \Sigma^{-1} (z - Af_0) \xrightarrow{\|F^{-1}\| \rightarrow 0}$$

$$\lim_{\|F^{-1}\| \rightarrow 0} \hat{U}f = Uf_0 + U(D^* D)^{-1} A^* \Sigma^{-1} (z - Af_0) = \quad D^* = A^* \Sigma^{-1/2}$$

$$= Uf_0 + U \underbrace{(D^* D)^{-1} D^*}_{D^-} \Sigma^{-1/2} (z - Af_0) =$$

$$= Uf_0 + U(\Sigma^{-1/2} A)^{-1} \Sigma^{-1/2} (z - Af_0) =$$

$f_0$  - это "усредненный"  
оценочный вектор.

$$= Uf_0 - U(\Sigma^{-1/2} A)^{-1} \Sigma^{-1/2} A f_0 + U(\Sigma^{-1/2} A)^{-1} \Sigma^{-1/2} z =$$

$$= U(I - D^- D) f_0 + U(\Sigma^{-1/2} A)^{-1} \Sigma^{-1/2} z$$

Итерационная  
схема  $\hookrightarrow [A, \Sigma]$

Итого:

$$\hat{u}_f = U (\Sigma^{-1/2} A)^+ \Sigma^{-1/2} z$$

$$\| \hat{u}_f - u_f \|^2 = \text{tr} \, U (A^* \Sigma^{-1} A)^+ U^* \text{ — конечна, если } \zeta$$

только если

$$U (I - A^+ A) = 0$$

$$(\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(U))$$

↑  
Не требуется оценивать то, что  
не известно.

# Сер. про сармюркоу инфоунауи

$$\hat{U}f = \frac{\text{ар. инф.}}{[A, f_0, F, \Sigma]}$$

$$\frac{\text{сер. инф.}}{[A, \Sigma]}$$

$$Uf_0 + U(A^T \Sigma^{-1} A + \underbrace{F^{-1}}_{\text{регуляризатор}})^{-1} A^T \Sigma^{-1} (z - Af_0)$$

$$U(\underbrace{\Sigma^{-1/2} A}_1)^T \Sigma^{-1/2} z$$

«паномия» — псевдообр.  
эо неустойчива операция.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — при } \omega = 0$$

Т.е. недовина, кетко са сер. А может привести к тому, что  $\hat{U}f$  не будет иметь смысла с  $Uf$  в схеме  $[A, \Sigma]$ .