

$$[A, f_0, F, \Sigma]$$

$$\xi = Af + \nu$$

$$\xi_{\xi} = AFA^* + \Sigma$$

$$\xi_{f_{\xi}} = FA^*$$

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 = \frac{1}{2} \left(\xi_{\xi} - \xi_{f_{\xi}} \xi_{\xi}^{-1} \xi_{f_{\xi}} \right) = \frac{1}{2} \left(F - FA^* (AFA^* + \Sigma)^{-1} AF \right)$$

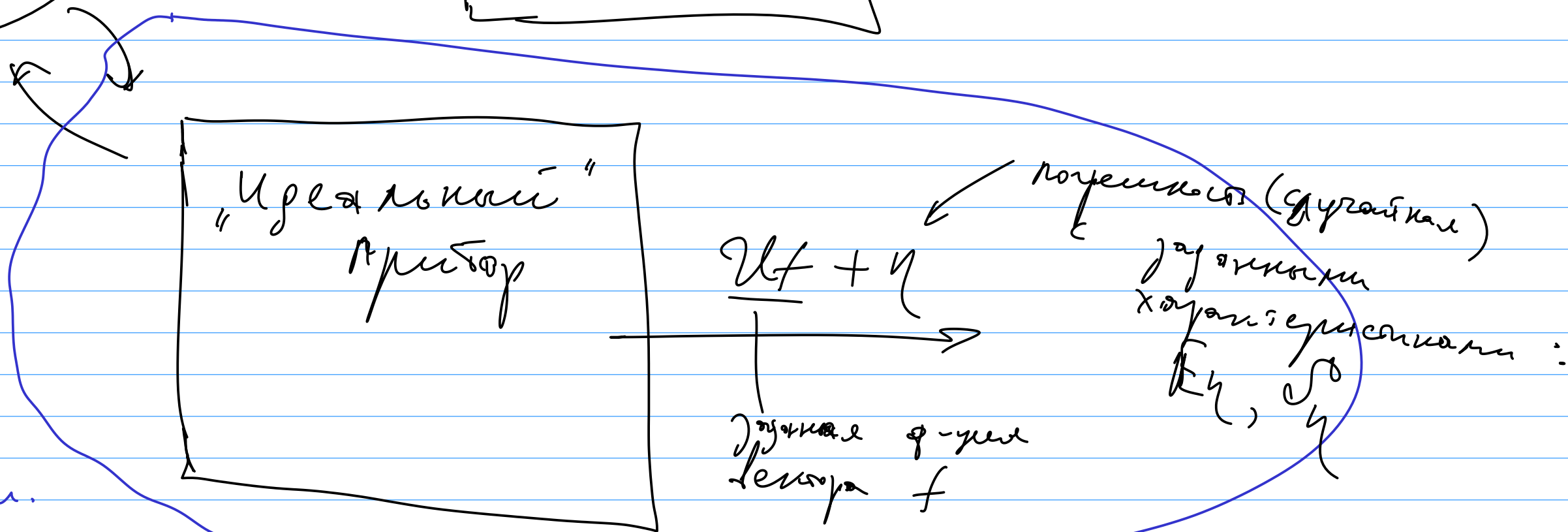
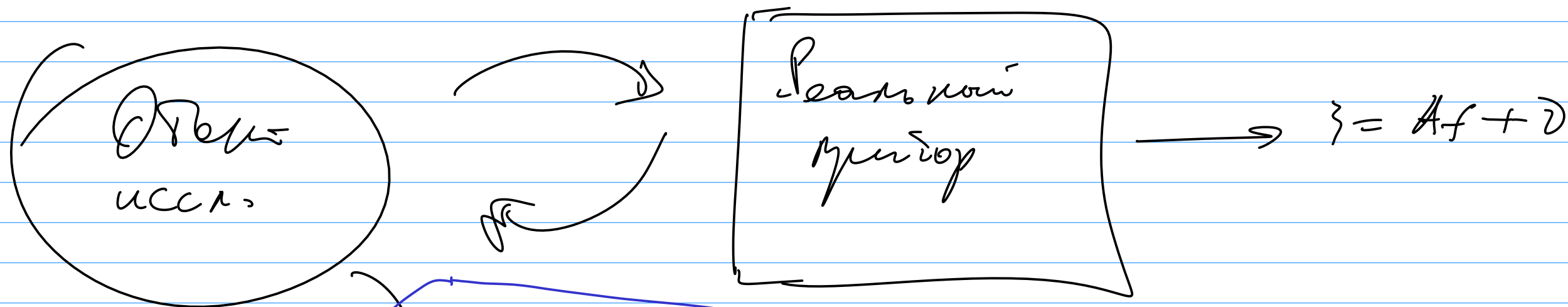
Оценки минимума функции $\mathcal{U}$ в точке f в
схеме $[A, f_0, F, \Sigma]$

Нужно оценить не f , а $\mathcal{U}$, где

$\mathcal{U}: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_k$ — мин. оператор.

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathcal{U}} - \mathcal{U}f\|^2 \sim \min_{R, \tau}$$

$$\hat{\mathcal{U}} = R\xi + \tau$$



Исследователь.
 Может не $\exists$ в реальности.
 Может быть принципиально реализуем.

Задача: найти наиболее оптимальную Uf , не
 работая с характеристиками y

(точнее: $E y = 0$, $E \|y\|^2 \sim \min$)

$$f' = Uf$$

$\int_z$ означает $\int_{f_3}$ измерений, т.к. $\varnothing$
 формула $z = Af + D$ и U

$$\int_z = AFA^* + \Sigma$$

$$\int_{f'} = \int_U = U \int_f U^* = U F U^*$$

$$\int_{f'_3} = \int_{Uf, z} = U \int_{f_3} = U \underbrace{FA^*}_{\int_{f_3}}$$

$$E f' = E(Uf) = U E f = U f_0$$

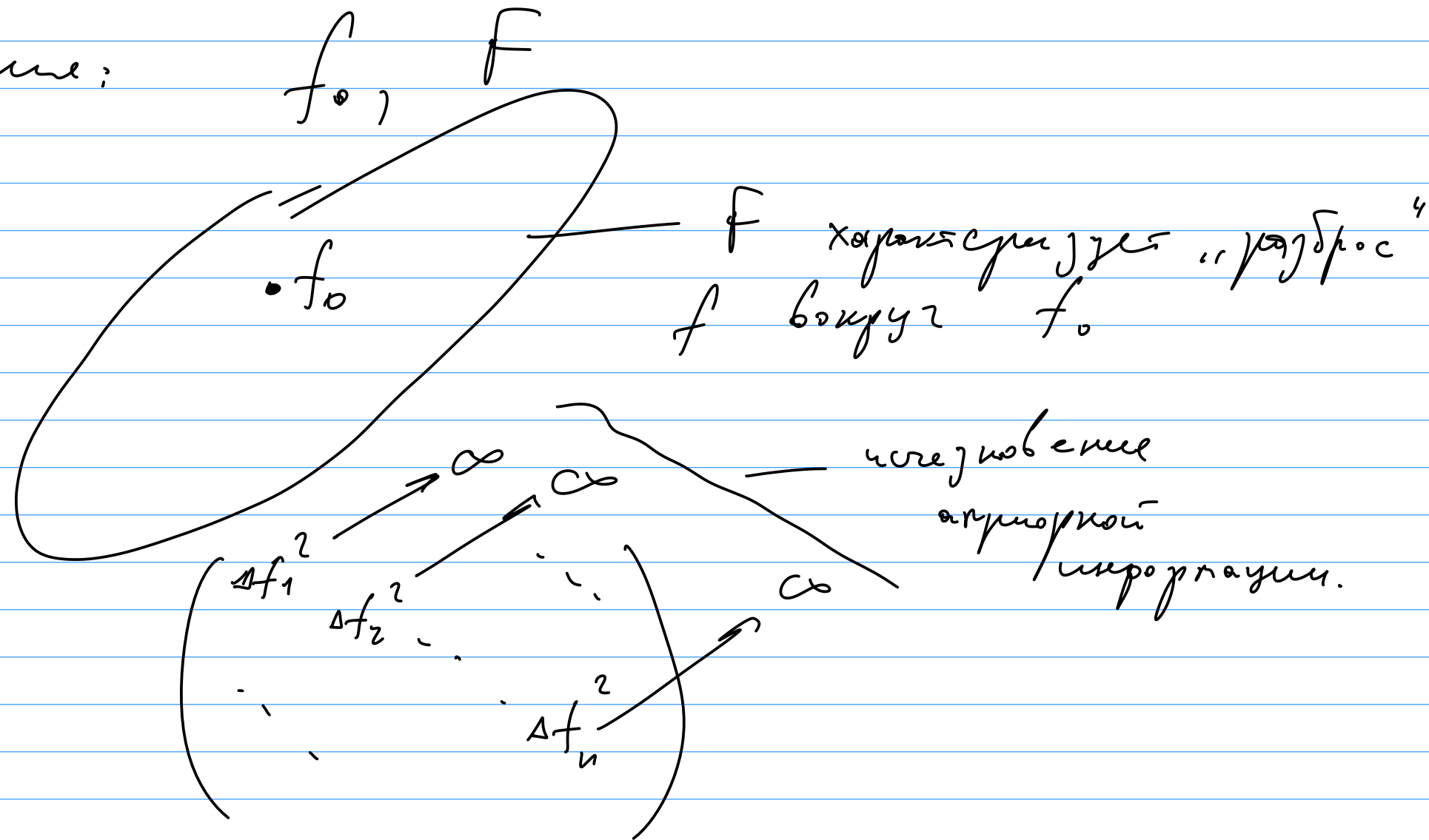
Выражен:

$$\hat{Uf} = Uf_0 + UFA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}(z - Af_0)$$

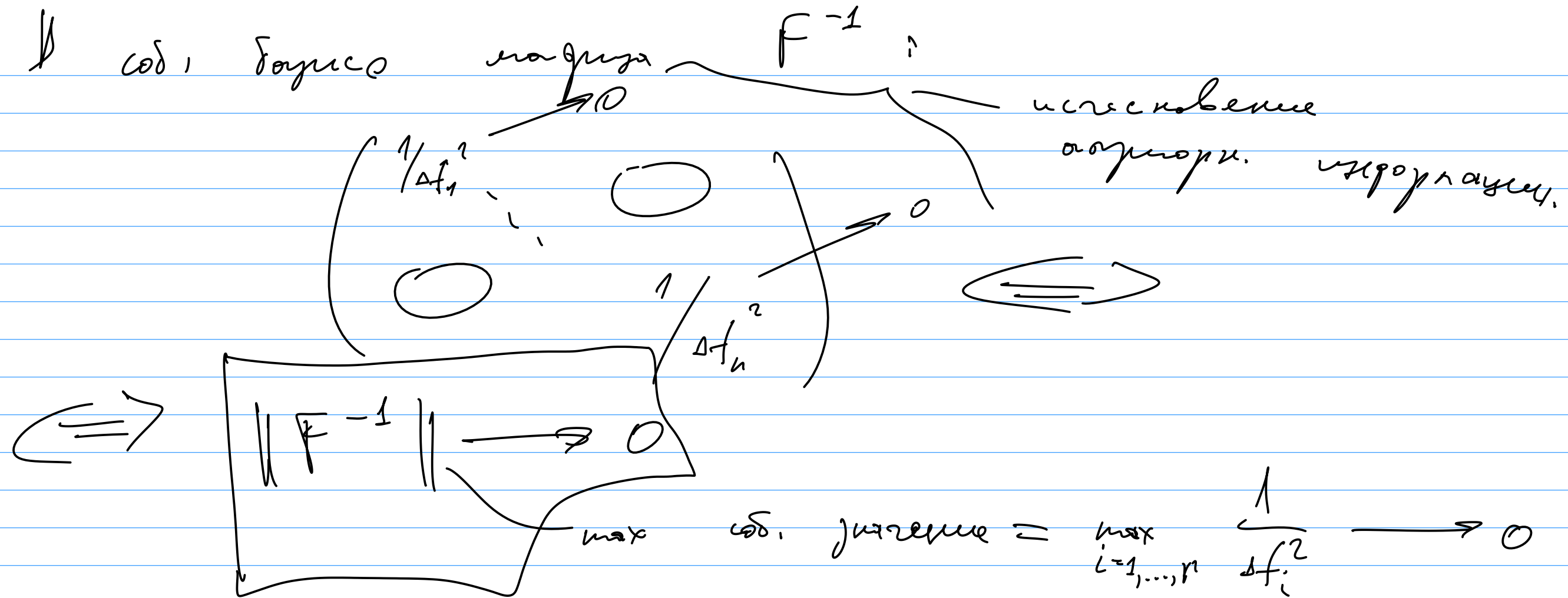
$$E \|\hat{Uf} - Uf\|^2 = \frac{1}{2} \left[U(F - FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}AF)U^* \right]$$

Равномерно изменяющаяся априорная информация

Априорная информация:



Матр. оператора F :



Далее будет показано, что F и $\sum$ обратимы.

{ все координаты интегралов погрешностей }
 порождены ненулевыми

Тогда
 $(AFA^* + \Sigma)$ — обратна, т.е.

$$(AFA^* + \Sigma)^{-1} = (AFA^* + \Sigma)^{-1}$$

Формула Шварца - Моррисона - Вудберга:

$$(YBY^* + B)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}Y(Z^*B^{-1}Y + G^{-1})^{-1}Z^*B^{-1}$$

Умк. о.н. $Y, Z, G = G^*, B = B^*$

$$(AFA^* + \Sigma)^{-1} = \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}A(A^*\Sigma^{-1}A + F^{-1})^{-1}A^*\Sigma^{-1}$$

Предположим, что

$$FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1} = (A^*\Sigma^{-1}A + F^{-1})^{-1}A^*\Sigma^{-1}$$

Покажем, что $\text{rank} = 0$

$$\begin{aligned}
 & F A^* (\Sigma^{-1} - \Sigma^{-1} A (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} A^* \Sigma^{-1}) - (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} A^* \Sigma^{-1} = \\
 & = \underbrace{F A^* \Sigma^{-1}} - F A^* \Sigma^{-1} A (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} \underbrace{A^* \Sigma^{-1}} - (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} \underbrace{A^* \Sigma^{-1}} = \\
 & = \left(F - F A^* \Sigma^{-1} A (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} - (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} \right) A^* \Sigma^{-1} \stackrel{?}{=} 0
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{F - F A^* \Sigma^{-1} A (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1}}_{\text{blue}} - \underbrace{(A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1}}_{\text{red}} =$$

$$= \underbrace{F (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})}_{\text{blue}} \underbrace{(A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1}}_{\text{red}} + \dots =$$

$$= \left(F (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1}) - F A^* \Sigma^{-1} A - I \right) (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} \stackrel{?}{=} 0$$

$$F(A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1}) - FA^* \Sigma^{-1} A - I =$$

$$= \underbrace{FA^* \Sigma^{-1} A} + \underbrace{FF^{-1}} - \underbrace{FA^* \Sigma^{-1} A} - \underbrace{I} = 0$$

↗ действительно
тождество.

$$\hat{u}_f = u_{f_0} + \mathcal{U}(A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} A^* \Sigma^{-1} (z - A f_0)$$

$$\mathbb{E} \|\hat{u}_f - u_f\|^2 = \text{tr} \mathcal{U} (A^* \Sigma^{-1} A + F^{-1})^{-1} \mathcal{U}^*$$

$$\|F^{-1}\| \rightarrow 0$$

$$A: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$$

$$n \neq m$$

$$A^* \Sigma^{-1} A$$

может быть
необязательно.

$$(B + \omega I)^{-1} \stackrel{?}{=} \omega^{-1} (I - B^{-}B) + B^{-} (I + \omega B^{-})^{-1} \quad \text{— предпологается проверка}$$

$\forall$ кит. оп. $B = B^* \geq 0$ — мор. опер.

Слева, умножить на $(B + \omega I)$, справа — на $(I + \omega B^{-})$

$$I (I + \omega B^{-}) \stackrel{?}{=} \omega^{-1} (B + \omega I) (I - B^{-}B) (I + \omega B^{-}) + (B + \omega I) B^{-}$$

$$I + \omega B^{-} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\omega} \left(B + \omega B B^{-} - \underbrace{B B^{-} B}_B - \omega \underbrace{B B^{-} B B^{-}}_{B B^{-}} + \omega I + \omega^2 B^{-} - \omega B^{-} B - \omega^2 \underbrace{B^{-} B B^{-}}_{B^{-}} \right) + B B^{-} + \omega B^{-}$$

$$I \stackrel{?}{=} \frac{1}{\omega} B + B B^{-} - \frac{1}{\omega} B - B B^{-} + I + \omega B^{-} - B^{-} B - \omega B^{-} + B B^{-}$$

$$B B^{-} \stackrel{?}{=} B^{-} B \quad \text{— самосопр. опер.}$$