

$$g_{1,0} + g_{2,0} + g_0 = \quad \Pi g \in V$$

Найдём g_0 . Для этого рассмотрим проекции $\in V$ на $V_0 = V_1 \cap V_2$

$$g_{1,0} \in V_{1,0} \perp V_0 \quad g_{2,0} \in V_{2,0} \perp V_0$$

$$g_0 \perp g_{1,0}, g_{2,0}$$

Для этого в свою очередь рассмотрим ОНБ $\in V_0$.

$$\Pi_1^V - \Pi_2^V : V \rightarrow V$$

$$(\Pi_1^V - \Pi_2^V)^* = \Pi_1^V - \Pi_2^V \quad - \text{самосопр. оператор.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists$ соотв. ОНБ $\text{подпрост. } V$

$e_1, \dots, e_l$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$

$\supset$ сод. базис (онб) и сод. значения операторов
 $\Pi_1^V - \Pi_2^V$

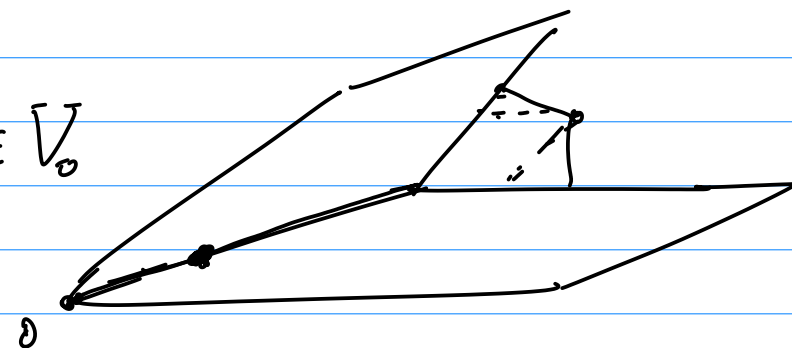
$$(\Pi_1^V - \Pi_2^V)e = 0 \Leftrightarrow e \in V_0 = V_1 \cap V_2$$

Очевидно, если $e \in V_0$, то $\Pi_1^V e = \Pi_2^V e = e \Rightarrow (\Pi_1^V - \Pi_2^V)e = 0$

$\subset V_1$
 $\subset V_2$

Если $(\Pi_1^V - \Pi_2^V)e = 0$, то $\Pi_1^V e = \Pi_2^V e \in V_0 \Rightarrow e \in V_0$

$\subset V_1$ $\subset V_2$



$$V \ni e = e_{1,0} + e_{2,0} + e_0$$

$$\Pi_1^V e = \Pi_1^V e_{1,0} + \Pi_1^V e_{2,0} + \Pi_1^V e_0 = e_{1,0} + \Pi_1^V e_{2,0} + e_0 \in \bar{V}_0$$

$$\Pi_2^V e = \Pi_2^V e_{1,0} + e_{2,0} + e_0 \in \bar{V}_0$$

$\in V_0$

$\Rightarrow e = e_0 \in V_0$

$$(\Pi_1^V - \Pi_2^V)e = \overbrace{0}^{0 \cdot e} \Leftrightarrow e \in V_0 \text{ — } e \text{ является сод. вектором}$$

оператора $\Pi_1^V - \Pi_2^V$ с сод. значением 0.

Таким образом, ОНБ ℓ V_0 — это множество
 ОН со собственных векторов оператора $\Pi_1^V - \Pi_2^V$ с сод. значением 0.

Т.е. среди всех векторов $e_1, \dots, e_\ell$ следует выбрать те,
 которые соответствуют сод. значениям $\lambda_i = 0$.

Обозначим такие векторы

$$e_1^{(0)}, \dots, e_{N_0}^{(0)} \text{ — ОНБ } \ell V_0$$

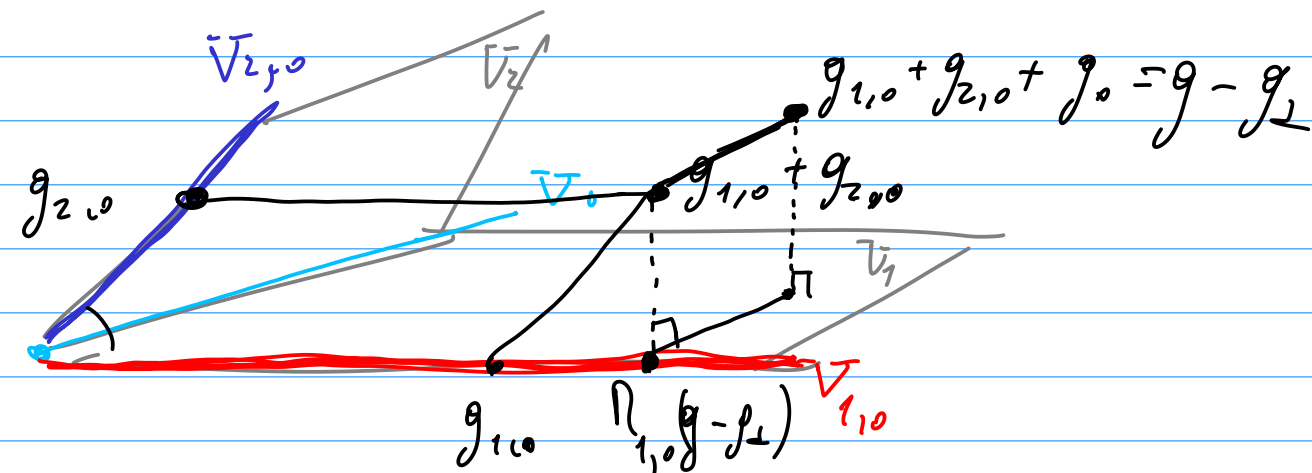
$$g_0 = \sum_{i=1}^{N_0} (g, e_i^{(0)}) e_i^{(0)}$$

— проекция уоф. g на
 $V_0 = L(e_1^{(0)}, \dots, e_{N_0}^{(0)})$

$$g = g_{1,0} + g_{2,0} + \boxed{g_0} + \boxed{g_\perp}$$

отделим ортогональное преобразование
 на V и на V_0

$$g_{1,0} + g_{2,0} = g - g_0 - g_\perp$$



$V_1, V_0, V_{1,0}$ — ортогональные гом. к V . Выбрав $\bar{V}_1$

$$V_1 = V_{1,0} \oplus V_0$$

$$\vec{V}_{1,0} \perp \vec{V}_0$$

Объясн. Π_0^V образи проектор на V_0 внутри V : $V \rightarrow V_0$

$$P_0^v f = \sum_{i=1}^{N_0} (f, e_i^{(0)}) e_i^{(0)}$$

$$n_{1,0}^V = n_1^V - n_0^V$$

— ортон. проектор на $\bar{V}_{1,0}$ внутри V : $V \rightarrow \bar{V}_{1,0}$

$$n_{2,0}^v = n_2^v - n_0^v$$

_____ 4 _____

$$V_{\zeta_2} \dashrightarrow V_{2,0}$$

Спектр, разложение ортогон. проектора:

$\Pi_{1,0}^V$: с.о.б. $\lambda = 1$ соотв. векторам из $V_{1,0}$ — векторам из V_0
Множество собственных с с.о.б. $\lambda = 1$.

$$\forall e \in \underline{V_{1,0}} \quad \Pi_{1,0}^V e = 1 \cdot e$$

с.о.б. $\lambda = 0$ соотв. векторам из ортогонального дополнения
к $V_{1,0}$ в пространстве V .

Используя $\Pi_{1,0}^V$ построим ОНБ пространства $V_{1,0}$ как
набор ОН с.о.б. векторов оператора $\Pi_{1,0}^V$, соответствующих
собственному значению 1. Обозначим их $e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}$

Аналогично находим ОНБ $\bar{V}_{2,0}$: $e_1^{(2)}, \dots, e_{N_2}^{(2)}$

Итак, имеем ОНБ-ы $\bar{V}$ разложения

$$V_0 = e_1^{(0)}, \dots, e_{N_0}^{(0)}$$

$$\bar{V}_{1,0} = e_1^{(1)}, \dots, e_{N_1}^{(1)}$$

$$V_{2,0} = e_1^{(2)}, \dots, e_{N_2}^{(2)}$$

$$\bar{V}_0 = \mathcal{L}(e_1^{(0)}, \dots, e_{N_0}^{(0)})$$

$$\bar{V}_{1,0} = \mathcal{L}(e_1^{(1)}, \dots, e_{N_1}^{(1)})$$

$$\bar{V}_{2,0} = \mathcal{L}(e_1^{(2)}, \dots, e_{N_2}^{(2)})$$

$$V = \bar{V}_{1,0} \oplus \bar{V}_{2,0} \oplus V_0$$

ОНБ разложения $\bar{V}$: $e_1^{(1)}, \dots, e_{N_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{N_2}^{(2)}, e_1^{(0)}, \dots, e_{N_0}^{(0)}$

ОНБ $\bar{V}_{1,0} \oplus \bar{V}_{2,0}$

$$g_{1,0} + g_{2,0} \in V_{1,0} \oplus V_{2,0} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{g_{1,0} + g_{2,0}}_{\text{цвесако}} = \sum_{i=1}^{N_1} \underbrace{\alpha_i}_{\text{Требуе се коџи}} e_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_2} \underbrace{\beta_j}_{\text{цвесако}} e_j^{(2)}$$

Требуе се коџи

Умножити обе страни скаларно на $e_p^{(1)}$
 Све $e_i^{(1)}$ ортогонални груп групи. $\Rightarrow (e_i^{(1)}, e_p^{(1)}) = \delta_{ip}$
 Но $e_i^{(1)}$ и $e_j^{(2)}$ вообичајно не ортогонални
 Ако помножимо можно умножити на $e_p^{(2)}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_p + \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j (e_p^{(1)}, e_j^{(2)}) &= (g_{1,0} + g_{2,0}, e_p^{(1)}) & p=1, \dots, N_1 \\ \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i (e_i^{(1)}, e_p^{(2)}) + \beta_p &= (g_{1,0} + g_{2,0}, e_p^{(2)}) & p=1, \dots, N_2 \end{aligned} \right.$$

$\uparrow$ Система линейных уравнений относительно неизвест.
 Коэфф. $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}, \beta_1, \dots, \beta_{N_2}$ (их $N_1 + N_2$ штук).

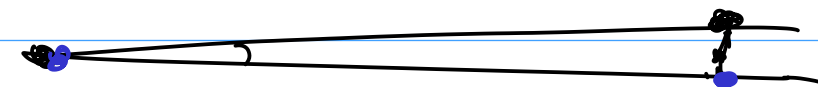
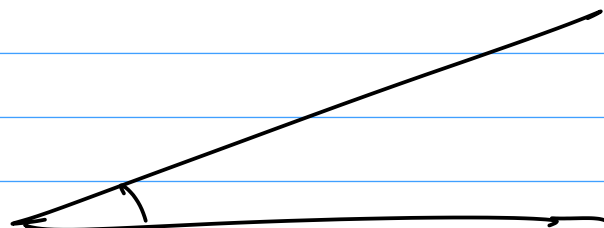
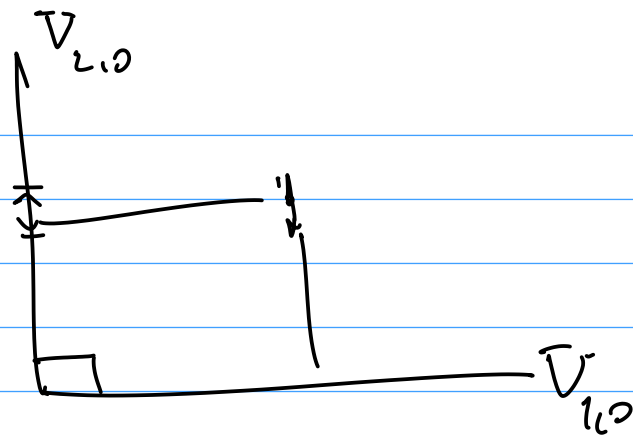
При этом в системе $N_1 + N_2$ уравнений.

Матрица гош системы — до матрица грамма системы

Вектор $N_1 \times N_1$

$$M = \begin{pmatrix} (e_1^{(1)}, e_1^{(1)}) & (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) & \dots & (e_1^{(1)}, e_{N_1}^{(1)}) & (e_1^{(1)}, e_1^{(2)}) & \dots & (e_1^{(1)}, e_{N_2}^{(2)}) \\ (e_2^{(1)}, e_1^{(1)}) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{N_1}^{(1)}, e_1^{(1)}) & \dots & \dots & (e_{N_1}^{(1)}, e_{N_1}^{(1)}) & (e_{N_1}^{(1)}, e_1^{(2)}) & \dots & (e_{N_1}^{(1)}, e_{N_2}^{(2)}) \\ \hline (e_1^{(2)}, e_1^{(1)}) & \dots & \dots & (e_1^{(2)}, e_{N_1}^{(1)}) & (e_1^{(2)}, e_1^{(2)}) & \dots & (e_1^{(2)}, e_{N_2}^{(2)}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{N_2}^{(2)}, e_1^{(1)}) & \dots & \dots & (e_{N_2}^{(2)}, e_{N_1}^{(1)}) & (e_{N_2}^{(2)}, e_1^{(2)}) & \dots & (e_{N_2}^{(2)}, e_{N_2}^{(2)}) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 \times N_2 \\ \\ \\ \\ N_2 \times N_2 \end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$



$\det M = \delta^2$ — ^(матр) ^{объем} ^{векторов} $e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{n_2}^{(2)}$, "натянутого" на

$$\delta^2 \in (0, 1]$$

$V_{1,0}, V_{2,0}$ — относительные формы

V_1, V_2 — абсолютные формы

δ^2 — индекс независимости относительных форм $V_{1,0}$ и $V_{2,0}$