

† случай ортогонального проецирования  $\forall g \in L^2_\mu(\bar{X})$

$$g = \underset{V}{g_V} + \underset{V^\perp}{g_\perp}$$

† случай косого проецирования

$$L^2_\mu(\bar{X}) = \underbrace{V_{1,0} \oplus V_{2,0} \oplus V_0}_{\cong V} \oplus V^\perp$$

То, что характерно  
именно для  $V_1$   
(в отличие от  $V_2$ )

$$\forall g \exists ! \left[ g = g_{1,0} + g_{2,0} + g_0 + g_\perp \right]$$

$$g_{1,0} \in V_{1,0}$$

$$g_{2,0} \in V_{2,0}$$

$$g_0 \in V_0$$

$$g_\perp \in V^\perp$$

Общее для  $V_1$  и  $V_2$

$V_{2,0}$  не имеет отношения  
ни к  $V_1$ , ни к  $V_2$ .

То, что характерно для  $V_2$   
(в отличие от  $V_1$ )

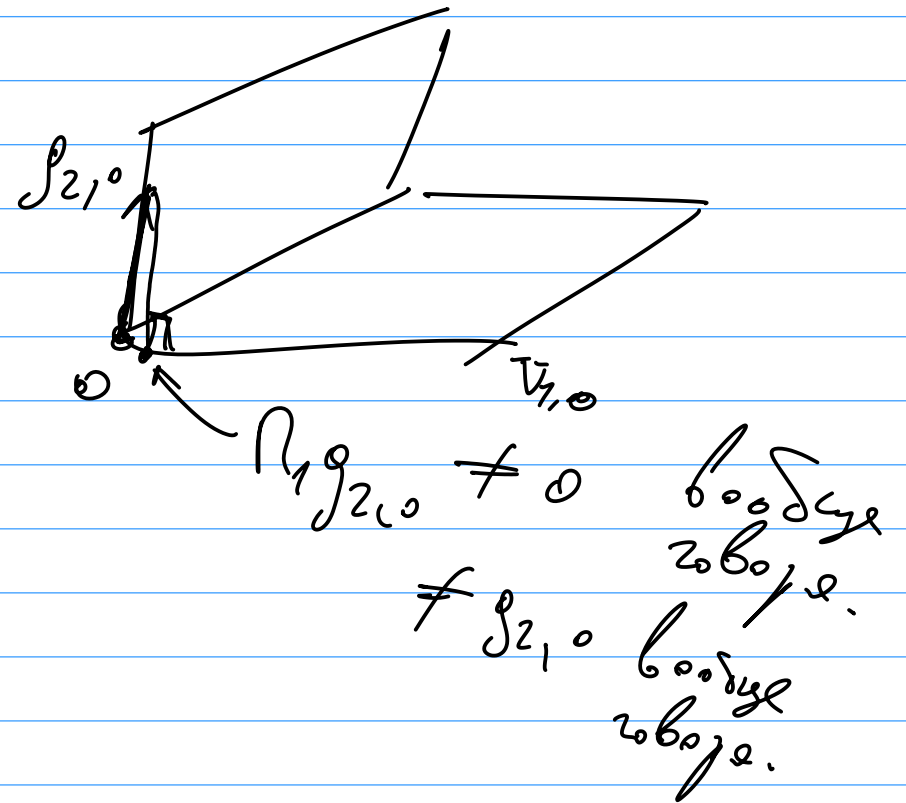
Пусть  $V_1 = \mathcal{L}(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)})$   
 $V_2 = \mathcal{L}(f_1^{(2)}, \dots, f_m^{(2)})$

Пусть  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — ортогональные проекторы на  $V_1$  и  $V_2$

$V^\perp$  — ортогональное дополнение к  $V_1 + V_2$

$$\forall g' \in V^\perp \quad g' \perp V_1 \quad \text{и} \quad g' \perp V_2$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 g &= \Pi_1 g_{1,0} + \Pi_1 g_{2,0} + \Pi_1 g_0 + \Pi_1 g^\perp = \\ &= g_{1,0} + \Pi_1 g_{2,0} + g_0 + 0 \end{aligned}$$



Если рассмотреть  $\Pi$  — ортогонал. проектор на подпрост.  $V$ , то

$$\begin{aligned} \Pi g &= \Pi_{f_{1,0}} + \Pi_{f_{2,0}} + \Pi_{f_0} + \Pi_{f_{\perp}} = \\ &= f_{1,0} + f_{2,0} + f_0 + 0 \quad \text{— "отсекается" } f_{\perp} \end{aligned}$$

$$f_{\perp} = g - \Pi g$$

Как рассмотреть  $\Pi$ ?

Предположим: рассмотрим  $\mathcal{OKE} \ell \subset V$ .

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i^{(1)} f_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m c_j^{(2)} f_j^{(2)} \mid c_i^{(1)}, c_j^{(2)} \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}(f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_m^{(2)})$$

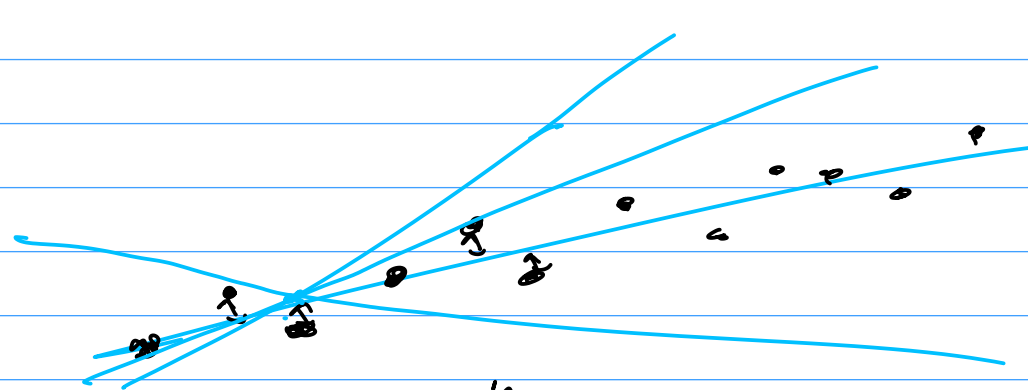
Ортонормированная система функций

$$\tilde{f}_1 = f_1^{(1)} / \|f_1^{(1)}\|$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{f_2^{(1)} - (f_2^{(1)}, \tilde{f}_1) \tilde{f}_1}{\|f_2^{(1)} - (f_2^{(1)}, \tilde{f}_1) \tilde{f}_1\|} \quad \begin{matrix} \nearrow = 0 \\ \searrow \neq 0 \end{matrix}$$

⋮

Курсе и способам метод главних компонента  
(PCA - principal component analysis)



$\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_k$

$$V = \mathcal{L}(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_k)$$

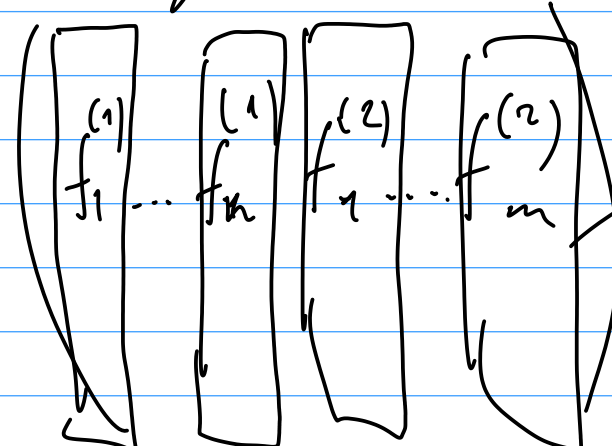
$$\sum_{i=1}^n \|f_i^{(1)} - \Pi f_i^{(1)}\|^2 + \sum_{j=1}^m \|f_j^{(2)} - \Pi f_j^{(2)}\|^2 \sim \min_{\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_k \text{ OK}} \text{PCA}$$

Необходимо  $\forall k \in \mathbb{N}$  решение задачи минимизации.

$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots$  — столбцовый базис оператора  $F$ :

$$Fg \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i^{(1)}(f_i^{(1)}, g) + \sum_{j=1}^m f_j^{(2)}(f_j^{(2)}, g)$$

$\tilde{e}_\mu$  матрицы:

матр.  $G =$   каждое из них "встраивается" в столбец.

матр. оператора  $F = G G^T \Rightarrow$  соб. значения  $F$  — это инварианты значений  $G$ .

соб. значения  $F$  — это квадраты инв. чисел  $G$ .

Нужно найти сингулярный базис  $G$

Для этого  $\exists$  функция  $SVD$

Singular Value Decomposition

$$[U, \Sigma, V^T] = SVD(G)$$

и диагональ — сингулярные числа  $G$

$$G = U \Sigma V^T$$

↑ столбцы  $U$  — это и

есть необходимые сингулярные  
векторы  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots$

выбирая функцию  $SVD$  нужно использовать вариант.  
Поэтому важно,  $U$  — количество кан-в. чис.  $\sim 10^3$   $B = 10 \text{ TB}$

$\vec{V}$  = линейная оболочка, наделенная на векторы  
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$  соответствующие НЕ нулевыми  
 числ. значениями  $\in$ , тех чисел не больше, чем  
 $n+m$

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  где  $k$  — ранг матрицы  $A$  (кол-во ненулевых  
 диаг. элементов в матрице  $A^0$ ) — это  
 и есть ОНБ  $\vec{V}$

$$P_g = \sum_{i=1}^k (g, \tilde{e}_i) \tilde{e}_i = g_{1,0} + g_{2,0} + g_0 + 0$$

↑  
"ортогональное"  
слагаемое  
проекции на  $P$   
 $g_{\perp}$

$$g_{\perp} = g - P_g$$

$$g = \underbrace{g_{1,0} + g_{2,0} + g_0}_{\text{компоненты в } P} + \boxed{g_{\perp}}$$

← компоненты с помощью  $P$ .

Дополнительные переходы  $\mathcal{Q}$  подпространств  $V$ , т.е.

$$V_0, V_{1,0}, V_{2,0} \subset V$$

Как это сделать?

Перейти к матрице операторов и координатам узла.

В допуске  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$  подпространств  $V$ .

$$g \longrightarrow g - g_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} (g - g_1, \tilde{e}_1) \\ \vdots \\ (g - g_1, \tilde{e}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g, \tilde{e}_1) \\ \vdots \\ (g, \tilde{e}_k) \end{pmatrix}$$

$\Pi_1$  — проектор (ортогональный) на  $\bar{V}_1$

$\Pi_1 \longrightarrow \Pi_1^V$  — сужение  $\Pi_1$  на  $V$

$$\Pi_1 : \mathcal{L}_V^p(\bar{X}) \rightarrow \bar{V}_1$$

$$\Pi_1^V : V \rightarrow \bar{V}_1$$

$$\Pi_1^V \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (\Pi_1^V \tilde{e}_1, \tilde{e}_1) & \dots & (\Pi_1^V \tilde{e}_k, \tilde{e}_1) \\ (\Pi_1^V \tilde{e}_1, \tilde{e}_2) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Pi_1^V \tilde{e}_1, \tilde{e}_k) & \dots & (\Pi_1^V \tilde{e}_k, \tilde{e}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Pi_1 \tilde{e}_1, \tilde{e}_1) & \dots & (\Pi_1 \tilde{e}_k, \tilde{e}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Pi_1 \tilde{e}_1, \tilde{e}_k) & \dots & (\Pi_1 \tilde{e}_k, \tilde{e}_k) \end{pmatrix}$$