

$$\vec{z} = \Pi_{R(\Sigma_z)} \vec{z} + \Pi_{R^\perp(\Sigma_z)} \vec{z}$$

Базис Карунена-Лоэва саян. лектора $\{$:

$$\underline{e_1, \dots, e_m} \text{ - ОКБ } \{ : \Omega \rightarrow R_m$$

$$\Sigma_z : R_m \rightarrow R_m$$

сод. лектора оператор Σ_z

Сод. значение оператора Σ_z : $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 = \dots = \sigma_m^2 = 0$

$$r = \text{rank } \Sigma_z$$

$$R(\Sigma_z) = L(e_1, \dots, e_r)$$

$$R^\perp(\Sigma_z) = L(e_{r+1}, \dots, e_m)$$

$$\vec{z} = \sum_{i=1}^r z_i e_i + \sum_{i=r+1}^m z_i e_i$$

$$z_i = (z, e_i)$$

$$\mathbb{E} z_i = 0 \quad \text{н.к.} \quad \mathbb{E} z = 0$$

σ_i^2 — дисперсия z_i

При $i > 2$ $\sigma_i^2 = \mathbb{D} z_i = 0$

При $i > 2$

$$\sigma_i^2 = \mathbb{D} z_i = \mathbb{E} (z_i - \mathbb{E} z_i)^2 = \mathbb{E} z_i^2 = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{макс. значение} \\ \text{случ. величины } z_i^2 \end{array} \rightarrow$$

равно 0. $\Rightarrow$

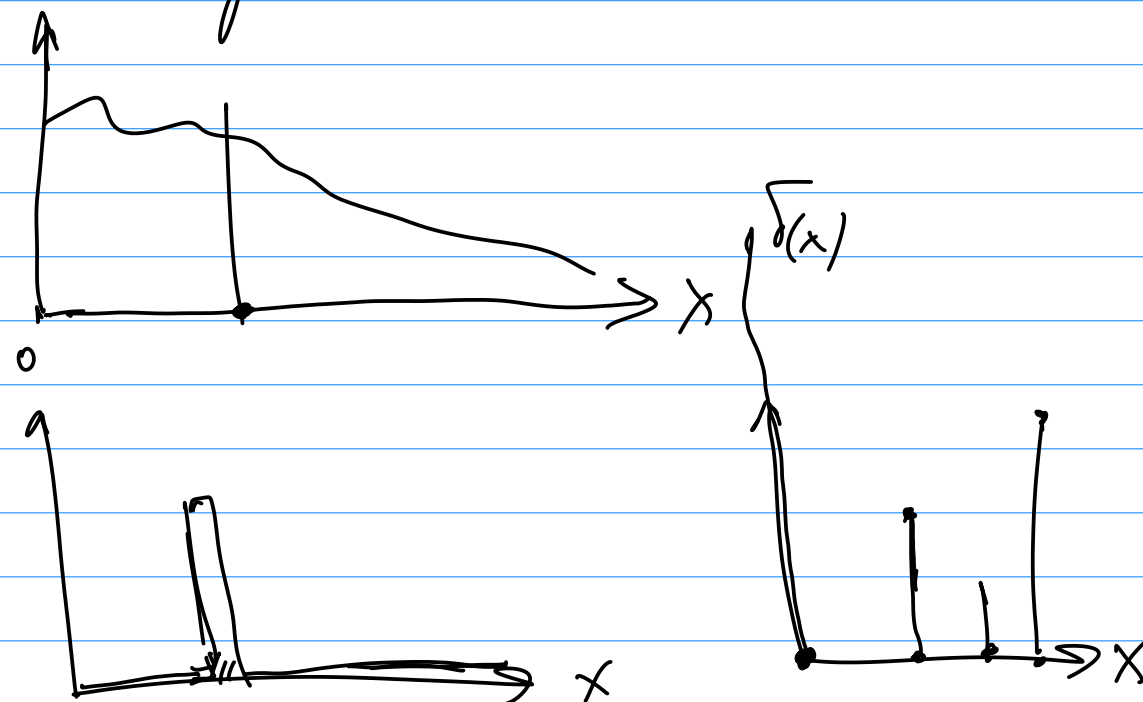
$\Rightarrow z_i^2 = 0$ почти наверное

$$\mathbb{E} z_i^2 = \int_0^{\infty} x p_{z_i^2}(x) dx = 0$$

$\mu = z_i^2$

$$\mathbb{E} \mu = \int_0^{\infty} x p_{\mu}(x) dx$$

$\Rightarrow z_i^2 = 0$ почти наверное $\Rightarrow z_i = 0$ н.к.



Т.е. ортонормальны

$$\Pi_{R^\perp(\Sigma_\gamma)} \{ = \sum_{i=\gamma+1}^m \{ \}_i e_i = 0 \quad \text{n.k.}$$

0 n.k. при $i = \gamma+1, \dots, m$.

$$\Rightarrow \boxed{f = \sum_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^-} \quad \text{ортонормальны}$$

$$h_{\text{reg}}(R) = h(R \Sigma_\gamma R^* - 2 \Sigma_{f_\gamma} R^*)$$

$$R = \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^-$$

$$\Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^- \Sigma_\gamma \Sigma_\gamma^{-*} \Sigma_{f_\gamma}^* - 2 \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^{-*} \Sigma_{f_\gamma}^* =$$

$$= \Sigma_{f_\gamma} \underbrace{\Sigma_\gamma^- \Sigma_\gamma \Sigma_\gamma^-}_{\Sigma_{\gamma+}} - 2 \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^- \Sigma_{\gamma+} =$$

$$= \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^- \Sigma_{\gamma+} - 2 \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^- \Sigma_{\gamma+} = - \Sigma_{f_\gamma} \Sigma_\gamma^- \Sigma_{\gamma+}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_\gamma^{-*} = \Sigma_\gamma^* = \Sigma_\gamma, \\ \text{т.е. } \Sigma_\gamma^* = \Sigma_\gamma \\ \Sigma_{f_\gamma}^* = \Sigma_{\gamma+} \\ A^{-1} A A^{-1} = A^{-1} \quad \forall \text{ орт. } A. \end{array} \right.$$

Полное гусеничное отклонение $\hat{f}$ от f если

$$h(R) = \text{tr} \Sigma_f + h_{\text{reg}}(R) = \text{tr} \left(\Sigma_f - \Sigma_{fz} \Sigma_z^{-1} \Sigma_{zf} \right)$$

Можно;

$$\hat{f} = \Sigma_{fz} \Sigma_z^{-1} z$$

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 = \text{tr} \left(\Sigma_f - \Sigma_{fz} \Sigma_z^{-1} \Sigma_{zf} \right)$$

канальная в ср. кв.
линейная оценка

сопутствующее ей
ср. кв. отклонение.

Сформулируй $\mathbb{E}f = f_0$, $\mathbb{E}\zeta = \zeta_0$

Дано: $\mathbb{E}f = f_0$, $\mathbb{E}\zeta = \zeta_0$
 Σ_ζ , Σ_f , $\Sigma_{f\zeta}$

Найти: Каноническую л.с.к. минимальную оценку f по ζ

$$\hat{f} = \lambda \zeta + \tau$$

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f - f_0$$

$$\Delta \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \zeta - \zeta_0$$

$$\Delta f = f - \mathbb{E}f$$

$$\mathbb{E}\Delta f = \mathbb{E}f - \mathbb{E}f = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \|R_{\gamma} + \gamma - f\|^2 &= \mathbb{E} \|R(\gamma - \gamma_0 + \gamma_0) + \gamma - (f - f_0 + f_0)\|^2 = \\
&= \mathbb{E} \|R_{\Delta\gamma} + R_{\gamma_0} + \gamma - \Delta f - f_0\|^2 = \\
&= \mathbb{E} \|(R_{\Delta\gamma} - \Delta f) + \underbrace{(R_{\gamma_0} + \gamma - f_0)}_{\text{не зависит от } \gamma}\|^2 = \\
&= \mathbb{E} \|R_{\Delta\gamma} - \Delta f\|^2 + \mathbb{E} \|R_{\gamma_0} + \gamma - f_0\|^2 + 2 \mathbb{E} (R_{\Delta\gamma} - \Delta f, R_{\gamma_0} + \gamma - f_0) = \\
&= \mathbb{E} \|R_{\Delta\gamma} - \Delta f\|^2 + \|R_{\gamma_0} + \gamma - f_0\|^2 + 2 \underbrace{\left(\mathbb{E} (R_{\Delta\gamma} - \Delta f) \right)}_{=0}, R_{\gamma_0} + \gamma - f_0) = \\
&= \mathbb{E} \underbrace{\|R_{\Delta\gamma} - \Delta f\|^2}_{\text{не зависит от } \gamma} + \|R_{\gamma_0} + \gamma - f_0\|^2 \sim \min_{\gamma, \gamma_0}
\end{aligned}$$

Кон-
 тензор

Опре- мат. от. сущ. вектор μ :
 $\forall$ к сущ. вектор e

$(\underline{\mu}, e) = \underline{\mu}(e)$
 определе- ный
 к сущ. вектор.

сущ. вектор.

2-ое значение $\|Rz_0 + \tau - f_0\|^2$ можно задать выбором

$\tau = f_0 - Rz_0$ при $\forall R$. Миним $\| \dots \|^2$ для не может.

Т.е. задача $\min_{R, \tau} \|R\Delta z - \Delta f\|^2 + \|Rz_0 + \tau - f_0\|^2$ может быть решена

сущ. образом:

1)

миним

задачу

$\min_{R, \tau} \|R\Delta z - \Delta f\|^2$

$\Rightarrow$

$$R_{opt} = \sum_{\Delta f \Delta z} \sum_{\Delta z}^{-1}$$

2)

Для того

R_{opt}

выбора

$\tau_{opt} =$

$$f_0 - R_{opt} z_0$$

$\Sigma_{\Delta f, \Delta z} = \mathcal{P}_{f, z}$ — кросс-ковариационный оператор f и z

$\Sigma_{\Delta z} = \mathcal{P}_z$ — ковариационный оператор z

Следовательно, это сам оператор дано.

$$\hat{f} = \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} z + f_0 - \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} z_0 = f_0 + \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} (z - z_0)$$

$$\hat{f} = f_0 + \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} (z - z_0) \quad \mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 = \text{tr} \left(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} \mathcal{P}_{z, f} \right)$$

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{минимума}}}{=} \mathbb{E} \|\mathcal{R}_{\text{опт}} \Delta z - \Delta f\|^2 = \text{tr} \left(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_{f, z} \mathcal{P}_z^{-1} \mathcal{P}_{z, f} \right)$$