

$$h(R) = \frac{1}{2} \left(\underline{R \Sigma_f R^* - 2 \Sigma_{f_3} R^*} \right) \underset{R: R_m \rightarrow R_n}{\sim \min}$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(R + \delta R) \Sigma_f (R + \delta R)^* - 2 \Sigma_{f_3} (R + \delta R)^* = \underline{R \Sigma_f R^*} + \delta R \Sigma_f R^* + R \Sigma_f \delta R^* + \delta R \Sigma_f \delta R^* - \underline{2 \Sigma_{f_3} R^*} - \underline{2 \Sigma_{f_3} \delta R^*} =$$

$$= \left(\underline{R \Sigma_f R^* - 2 \Sigma_{f_3} R^*} \right) + \delta R \Sigma_f R^* + R \Sigma_f \delta R^* - 2 \Sigma_{f_3} \delta R^* + \delta R \Sigma_f \delta R^*$$

$$\delta h(R) = \frac{1}{2} \left(\delta R \Sigma_f R^* + R \Sigma_f \delta R^* - 2 \Sigma_{f_3} \delta R^* \right)$$

$$(\delta R \Sigma_f R^*)^* = R \Sigma_f^* \delta R^* = R \Sigma_f \delta R^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\delta R \Sigma_f R^*) = \frac{1}{2} (R \Sigma_f \delta R^*) \quad \text{cancellation}$$

$$\delta h(R) = 2 \frac{1}{2} \left(R \Sigma_f - \Sigma_{f_3} \right) \delta R^* = 0 \quad \text{for all } \delta R^* \text{ min}$$

even 2-2
no problem
no δR

11, то следует, что $R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3} \stackrel{?}{=} 0$

Для поиска лагранжиана $\delta R^A = (R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3})^*$, тогда

$$\delta h(R) = 2k \left((R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3})(R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3})^* \right) = 0$$

↑ неустойчивый оператор,
 и то след — это сумма всех его
соб. значений, $= 0$
все соб. значения — неустойч. } $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все соб. значения $= 0 \Rightarrow$ оператор — нулевой, т.е.

$$(R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3})(R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3})^* = 0 \Rightarrow \boxed{R\bar{Z}_3 - \bar{Z}_{f_3} = 0}$$

Конструкция

усл $A(\delta R^*)$ верно $\forall \delta R^*$

— верно

Покажем, что усл. B верно

усл $A(\delta R^*) \forall \delta R^* \Leftrightarrow$ все $A(\delta R^*)$ верно по $\forall \delta R^*$

Дано: все $A(\delta R^*)$ верно, можно δ и $\delta_{\text{н}}$ δR^*

Док-ва: верно усл. B.

Докажем, что у каждого-то у группы выполнения $A(\delta R^*)$ выполняется B и т.д.

$\exists \delta R^* \equiv$ у $A(\delta R^*)$ выполняется B.

Значит ли это, что B верно?

Получили операторное уравнение $R\Sigma = \Sigma f^T$ относительно R .

Если Σ обратна, то из $R\Sigma = \Sigma f^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R = \Sigma f^T \Sigma^{-1}$$

Если Σ необратима, то условие разрешимости уравнения $R\Sigma = \Sigma f^T$ является $N(\Sigma f^T) = N(\Sigma)$

Оказывается, что это условие сводится к равенству Σf^T и Σ .

Докажем это.

$$\forall x \in N(\Sigma) \quad x \in N(\Sigma f^T) \\ \Leftrightarrow \Sigma x = 0 \Rightarrow \Sigma f^T x = 0$$

$$\sum_{f_3} x = \mathbb{E} f(z, x) = 0 \text{ — нулю почти всюду.}$$

$$\sum_z x = \mathbb{E} z(z, x) = 0 \text{ — нулю}$$

Лемма Коши-Буняковского;
 $(a, b)^2 \leq \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$

$$\forall y \quad \left(\sum_{f_3} x, y \right)^2 = \left(\mathbb{E} f(z, x), y \right)^2 = \left(\mathbb{E} \left((z, x) (f, y) \right) \right)^2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E} (z, x)^2} \cdot \mathbb{E} (f, y)^2$$

$$\left(\underbrace{\sum_z x}_=0, x \right) = \left(\mathbb{E} z(z, x), x \right) = \mathbb{E} (z, x)^2 = 0, \text{ т.к. } x \in \mathcal{N}(\sum_z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall y \quad \left(\sum_{f_3} x, y \right)^2 \leq 0 \cdot \mathbb{E} (f, y)^2 = 0 \Rightarrow \forall y \quad \left(\sum_{f_3} x, y \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. при } y = \sum_{f_3} x \quad \left(\sum_{f_3} x, \sum_{f_3} x \right) = \left\| \sum_{f_3} x \right\|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{f_3} \chi = 0 \quad , \quad \text{т.е.} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{уравнение} \quad R \Sigma_3 = \Sigma_3 \quad \text{всегда выполняется}$$

Решение уравнения в общем случае:

$$R = \Sigma_{f_3} \Sigma_3^{-1} + Z \Pi_{\mathcal{L}^\perp(\Sigma_3)}$$

Вообще говоря Z — люб. о.л.р.

$$Z \Pi_{\mathcal{L}^\perp(\Sigma_3)} \Sigma_3 = 0 \quad \forall Z, \text{ т.к. } \Pi_{\mathcal{L}^\perp(\Sigma_3)} \Sigma_3 = 0$$

$$\Pi_{\mathcal{L}^\perp(\Sigma_3)} = I - \Sigma_3 \Sigma_3^{-1}$$

Итак:

$$R = \Sigma_{f_3} \Sigma_3^{-1} + Z (I - \Sigma_3 \Sigma_3^{-1}) \quad \forall Z$$

проект
на $\mathcal{L}^\perp(\Sigma_3)$

$$\hat{f} = R_3 = \sum_{f_3} \Sigma_3^{-1} \} + Z(I - \Sigma_3 \Sigma_3^{-1}) \}$$

$$\dots + Z \underbrace{N_{R^\perp}(\Sigma_3) \}$$

$\Downarrow$ 0 нормальное?

$$Z = \underbrace{N_R(\Sigma_3) \}_{\substack{\Downarrow \\ \xi \\ \text{нормальное?}}} + \underbrace{N_{R^\perp}(\Sigma_3) \}_{\substack{\Downarrow \\ 0 \\ \text{нормальное?}}}$$