

$l(\hat{f}(x), f_{\text{ис}})$ — риск — проблема
 задача — найти функцию $\hat{f}$, но $l(\hat{f}(x), f_{\text{ис}})$ зависит лишь
 от значения $\hat{f}$ в точке x .

$\mathbb{E} l(\hat{f}(z), f_{\text{ис}})$ — $\hat{f}$ зависит от x .
 теперь зависит только от $f(\cdot)$ и $f_{\text{ис}}$
 то, что нужно

Может так случиться, что $\mathbb{E} l(\hat{f}(z), f_{\text{ис}})$ не будет зависеть от $f_{\text{ис}}$
 (бегание, случайный случай). Тогда задачу поиска $\hat{f}$ можно переписать как

$$\mathbb{E} l(\hat{f}(z), f_{\text{ис}}) \sim \min_{\hat{f}: X \rightarrow \Phi}$$

В этом случае работает
 • равномерное оптимальное
 обобщение.

$\mathbb{E}_{\mathbf{z}} l(\hat{f}(\mathbf{z}), f_{\text{test}})$ зависит от f_{test} , ∞ можно рассчитать
 на самом ожидаемом случае:
 $\hookrightarrow$ недостоверный

$$\sup_{f_{\text{test}} \in \Phi} \mathbb{E} l(\hat{f}(\mathbf{z}), f_{\text{test}}) \sim \min_{f: X \rightarrow \Phi}$$

— минимаксная поправка
 (минимизируется
 максимальные
 средние потери)
 $\approx f_{\text{test}}$ по $\mathbf{z}$

Байесовский подход.

$f_{\text{ист}}$ предполагается совместным (заданным) распределением.

Это распределение выражает (моделирует) априорную информацию о $f_{\text{ист}}$.

Полная вероятностная модель — все совместно: $\{z, f_{\text{ист}}\}$
наблюд. $\nwarrow$ $\nearrow$ не наблюд.

Тогда задача сводится к:

$$\mathbb{E} l(\hat{f}(z), f_{\text{ист}}) \sim \min_{f: X \rightarrow \Phi}$$

$\uparrow$ это мат. ожидание ОТЛИЧАЕТСЯ от того, что было ранее.

то мат. ок. по $\{z \text{ и } f_{\text{ист}}\}$ (то что было только по z)

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{f_{\text{ист}}} \mathbb{E}_z$$

1. Совместное распределение имеет 2 случайных элемента

$$\begin{matrix} \zeta & \text{и} & f \\ \zeta: \Omega \rightarrow X & & f: \Omega \rightarrow \Phi \end{matrix}$$

Совместное распределение $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — общее для ζ и f вероятн. м-во.
 $\mathbb{P}_{\zeta, f}$ — известно

$\mathbb{P}_{\zeta|f}$ — условное распр. можно интерпретировать как
 распр. ζ при конкретном значении параметра f

$\mathbb{P}_{\zeta}$ — маргинальное распр. случайного элемента ζ .

$\mathbb{P}_f$ — марг. распр. f .

Если f существует, то мы собираемся оценить?

Оцениваем РЕАЛИЗАЦИЮ f в конкретном эксперименте.

В том же эксперименте мы наблюдаем реализацию случайного элемента z .

Знание реализации z помогает оценить реализацию f в том же эксперименте.

Вероятность реализации z и f "зачисланы" в совместном распределении P_{zf} .

"Вероятность существует", если z и f независимы:

$$P_{zf}(A, B) = P_z(A) P_f(B) \quad \forall A, B.$$

"Вероятность существует", если z и f зависимы

Уже считая f сугубо не бесспорна.

► Линейное отображение с. век. f по с. век. z

z и f — сугубо векторы.

$$z: \mathcal{L} \rightarrow R_m \quad f: \mathcal{L} \rightarrow R_n$$

Предположим, что $\sum z = 0$, $\sum f = 0$

$$\hat{f} = R_z$$

линейный оператор $\mathcal{L}_m \rightarrow R_n$

Будем искать оценку в таком виде.

~~$$\sum z = \sum f = 0$$~~

в разных пространствах: R_m и R_n

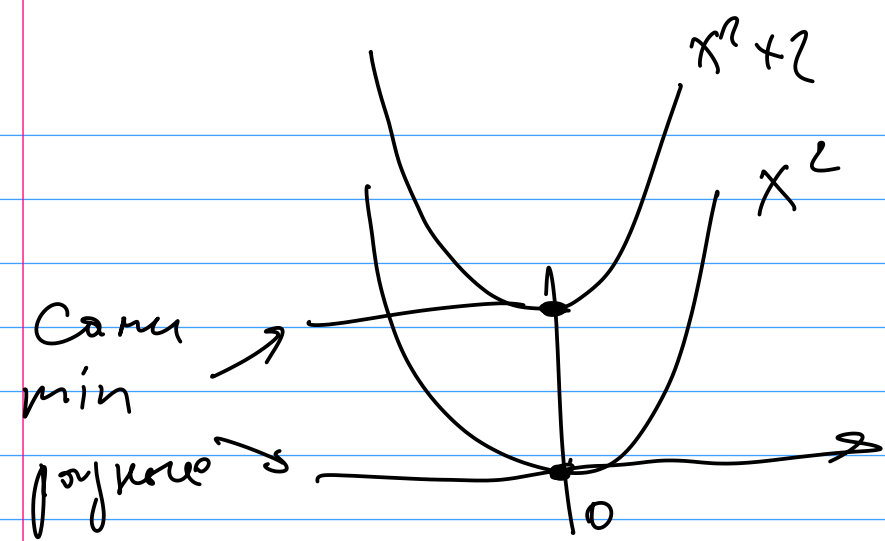
$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 = \mathbb{E} \|R_Z - f\|^2 \sim \min_{R: \mathcal{R}_m \rightarrow \mathcal{R}_n}$$

max. overlap
no $\{u, f\}$

$$\mathbb{E} \|R_Z - f\|^2 = \mathbb{E} \|R_Z\|^2 - 2 \mathbb{E} (R_Z, f) + \mathbb{E} \|f\|^2 =$$

$$= \text{tr} \Sigma_{R_Z} - 2 \underbrace{\text{tr} \Sigma_{f_Z} R^*}_{\parallel \text{tr} R \Sigma_{zf}} + \text{tr} \Sigma_f = \text{tr} R \Sigma_Z R^* - 2 \text{tr} \Sigma_{f_Z} R^* + \underbrace{\text{tr} \Sigma_f}_{\substack{\text{tr} \\ \text{invariant of } R}} \sim \min_{R: \mathcal{R}_m \rightarrow \mathcal{R}_n}$$

$$\text{tr} (R \Sigma_Z R^* - 2 \Sigma_{f_Z} R^*) \sim \min_{R: \mathcal{R}_m \rightarrow \mathcal{R}_n}$$



same min
polyhedron

same min
same min