

Теорема. Форма отображения g не жев. от формы уodr. $f \iff$
 $\iff$ форма отображения f не жев. от формы уodr. g

Док-во $\forall h \in V_g$ h не жев. от формы уodr. f

$$\Pi_f h = E h \iff (\Pi_f - E) h = 0$$

$$\forall h \in V_g \quad (\Pi_f - E) h = 0$$

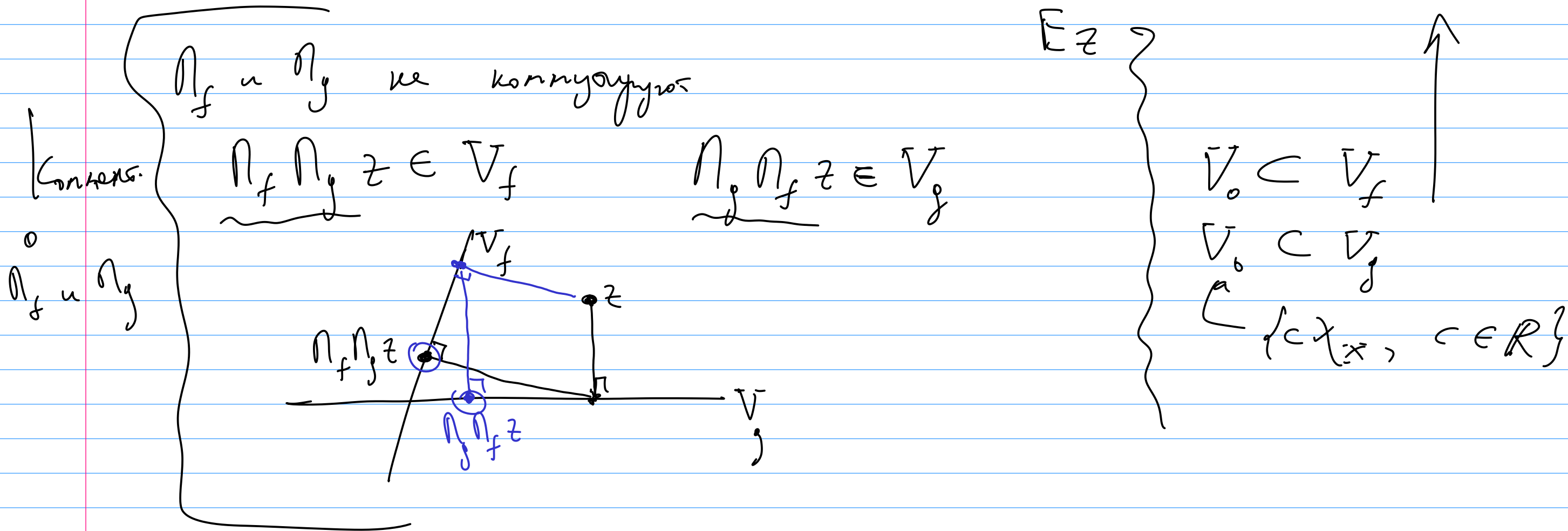
$$V_g = \{ \Pi_g z, z \in L_r^2(\bar{X}) \} - \text{множество всех проекций на } V_g$$

$$\forall z \in V_g \iff \Pi_g z = z \in V_g$$

$$\forall z \in L_r^2(\bar{X}) \quad (\Pi_f - E) \Pi_g z = 0$$

Доказано: $\forall z \in L_r^2(\bar{X}) \quad (\Pi_g - E) \Pi_f z = 0$

$$(\Pi_f - E)\Pi_g z = 0 \Leftrightarrow \Pi_f \Pi_g z = \underbrace{E \Pi_g z}_{\Pi_g z} \Leftrightarrow \Pi_f \Pi_g z = E z \quad \forall z \in \mathcal{L}_f^r(X).$$



$$(n_f n_g - E)z = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{L}_r^2(X) \left((n_f n_g - E)z, y \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n_f n_g z, y) - (Ez, y) = 0 \Leftrightarrow$$

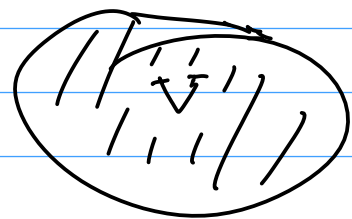
$$\Leftrightarrow (z, n_g n_f y) - (z, Ey) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z, (n_g n_f - E)y) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{L}_r^2(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n_g n_f - E)y = 0 \quad \forall y \in \mathcal{L}_r^2(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(n_g - E)n_f y = 0 \quad \forall y \in \mathcal{L}_r^2(X)} \quad - \text{ r.t.y. }$$

Косое проецирование



$$P_V g = \arg \min_{f \in V} \|g - f\|^2$$

Определение проектора через задачу минимизации
Подходит $\forall$ банахового или гильбертового эк-ва V .

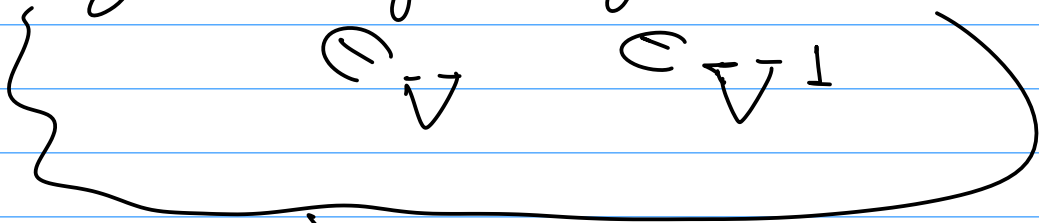
Для линейного подпрост-ва V можно свести P_V к ортогональному разложению

$$\forall g \in L^2_r(X)$$

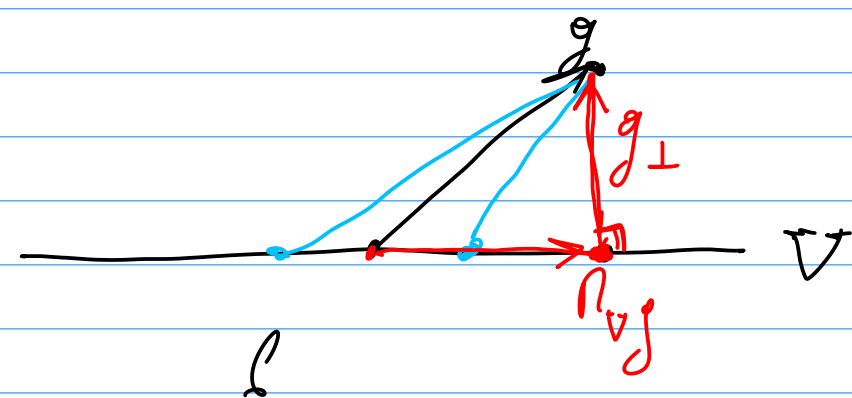
$$L^2_r(X) = V \oplus V^\perp :$$

$$g = P_V g + g^\perp$$

$$\begin{matrix} \in V & \in V^\perp \end{matrix}$$



то можно это переписать
как определение проектора P_V



Опред. Ортогональный проектор P_V на лине. подпростр. $V \subset X$
 оператор, который каждому $x \in X$ ставит в соответствие 1 -ое слагаемое в разложении x :

$$x = \boxed{x_V} + x_{\perp}, \text{ где } x_V \in V, x_{\perp} \in V^{\perp}.$$

Оператор P_V однозначно определен в силу единственности
 такого разложения (т.е. единственности пары $x_V, x_{\perp}$) $\forall x \in L^p(X)$.

Обоснов. применимости такого определения уже —
 только линейные подпростр.

При ортогональном проецировании $\mathcal{L}^2(\bar{X}) = V \oplus V^\perp$
 неразрывно связана с V

Можно вместо $V^\perp$ брать другое подпространство.

Пусть V_1 и V_2 — линейные подпространства: $\mathcal{L}^2_r(\bar{X}) = V_1 \oplus V_2$

$\forall g \in \mathcal{L}^2_r(\bar{X}) \exists g_1, g_2: g = g_1 + g_2, \text{ где } g_1 \in V_1, g_2 \in V_2$ — $\mathcal{L}^2_r(\bar{X}) = V_1 + V_2$ — "просто" сумма

Конкретно: Прямая сумма $\oplus$: —, — $\exists$ единственное —, —
деф. нужна

Тогда можно определить операторы $\mathcal{J}_1: \mathcal{L}_r^2(X) \rightarrow V_1$ и $\mathcal{J}_2: \mathcal{L}_r^2(X) \rightarrow V_2$ следующим образом. Оператор $\mathcal{J}_1$ каждому подр. $f \in \mathcal{L}_r^2(X)$ ставит в соответствие 1-ое слагаемое в разложении

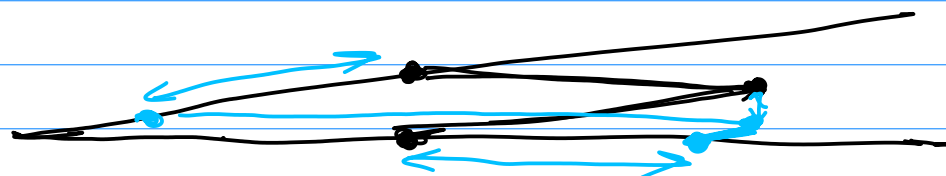
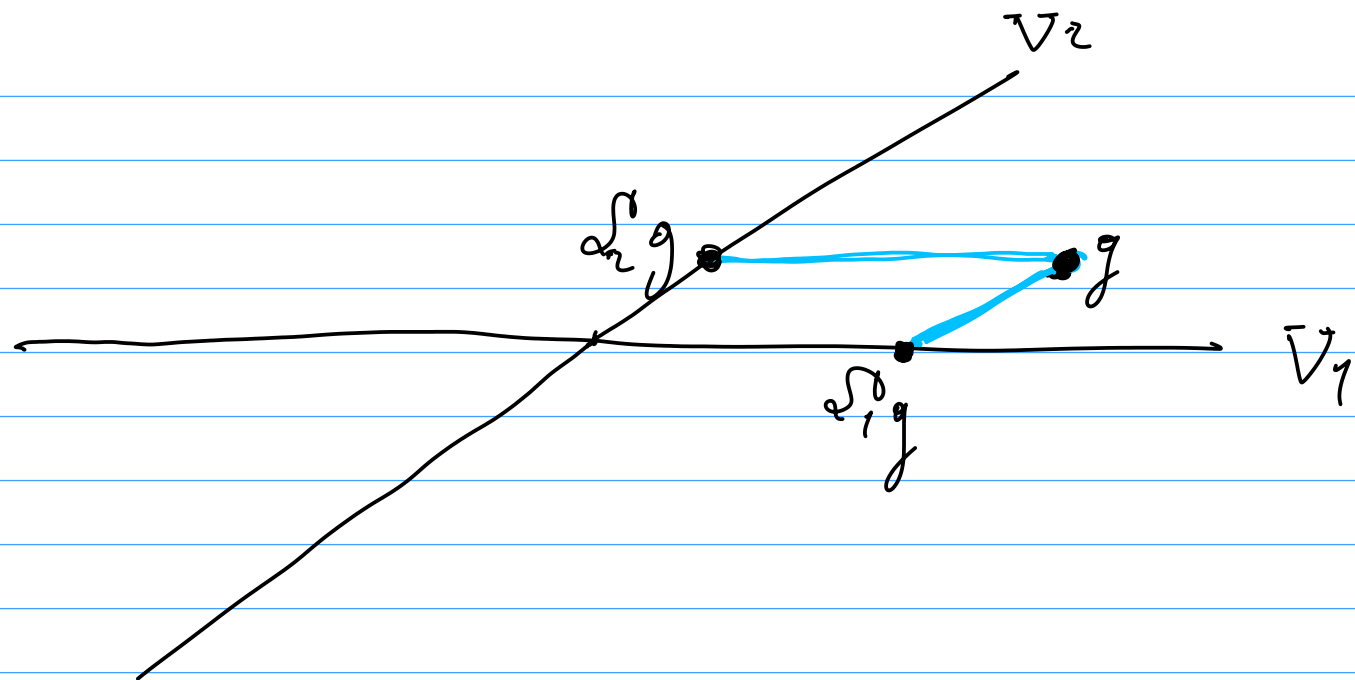
$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in V_1, \quad f_2 \in V_2.$$

Оператор $\mathcal{J}_2$ ставит в соотв. 2-ое слагаемое.

Операторы определены однозначно и имеют единственность

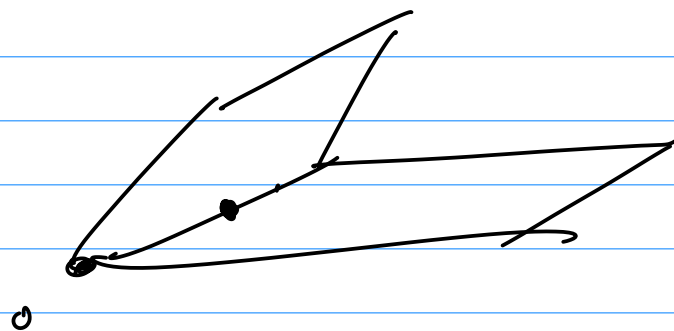
разложения $f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in V_1, \quad f_2 \in V_2$ (т.е. единственности пары f_1, f_2)

$\mathcal{J}_1$ — косой проектор на V_1 вдоль V_2
 $\mathcal{J}_2$ — косой проектор на V_2 вдоль V_1



- V_1 и V_2 — формы выражений некоторых сумм.
- Если задана точка, является выражение $p \in L^2_{\mu}(\bar{X})$ выражением 1-ой и 2-ой сумм.
- Проверить! p элементу, характерные для V_1 и V_2 .

Теперь $L^2_{\mu}(\bar{X}) \neq V_1 \oplus V_2$ хотя бы потому, что $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$



$$p \in V_1 \cap V_2$$

$$p = p + 0$$

$$p = 0 + p$$

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p$$

↓ ясно. $p = p_1 + p_2$
и единственно.

$$1-ое \in V_1$$

$$2-ое \in V_2$$

$$\mathcal{L}_f(\bar{X}) \neq V_1 + V_2$$

$$\dim \mathcal{L}_f(\bar{X}) \sim 10^6$$

$$\dim \bar{V}_1, V_2 \sim 10, 100, 10^3$$

На основе $\bar{V}_1$ и V_2 построить подпространства:

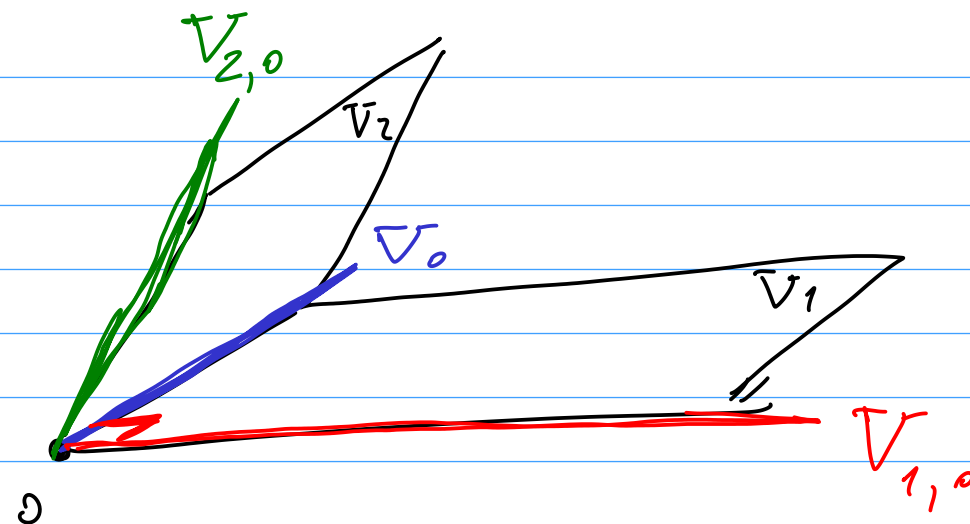
$$V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{V}_1 \cap V_2$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} V_1 + \bar{V}_2 = \{f_1 + f_2, f_1 \in V_1, f_2 \in V_2\}$$

$V^\perp$ — ортогон. г.п. $\in V$

$$V_{1,0} = V_1 \oplus \bar{V}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{ортогон. разложение к } V_0 \text{ внутри } V_1$$

$$V_{2,0} = V_2 \oplus \overset{\substack{\uparrow \text{усечение} \\ \text{г.п.}}}{\bar{V}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \text{ортогон. разложение к } V_0 \text{ внутри } V_2$$



$\vec{V}$ — все 3-еerie м-во
 $\vec{V}^\perp$ — разности, которые
 невозможно нарисовать.