

Стохастический эксперимент.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω — мн-во элементарных событий
 $\mathcal{A}$ — алгебра всех событий
(подмножеств множества Ω)

$$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cap B = \emptyset$$

Сущ. лемма ξ — это ф-ция $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Сущ. лемма.

По аналогии со сущ. леммой

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$, удовлетворяющая условию:

(ξ, ε) — это сущ. лемма $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_n$

$(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, $\mathbb{R}_n$ — евклидово пр-во

$\xi(\omega)$

ξ — случайный

ε — «фиксир»

ε не зав. от $\omega \in \Omega$

↑ «фиксированный», неслучайный вектор

Мат. ожидание $E\{z}$ сумм. вектора z называется вектор,
удовлетворяющий условию: $(E\{z}, e) = E(z, e) \quad \forall e \in R_n$

Т.е. $E\{z} \in R_n$ — суммный вектор.

Знак мат. ожидания E можно "вынести" за знак
скалярного произведения. — ИНТЕРПРЕТАЦИЯ (мнемоника)
ПО СУЩ. НЕ ВЕРНО

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОКБ

$\xi_i = (z, e_i)$, $i = 1, \dots, n$ — совокупность сумм. величин — координат
суммного вектора z

$$z = \sum_{i=1}^n (z, e_i) e_i$$

$E\{z_i}$ — мат. ох. сумм. величины z_i

$$\mathbb{E} z = \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}(z, e_i) \right) e_i = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (z, e_i) e_i \right)$$

мат. ох. е. нум.
величины

мат. ох. с.п.
величина

~~Важно с мат. ох. жд. как суммиру~~

$$\mathbb{E}(z, e) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{E} z, e) \quad \forall e \quad \text{---} \quad \text{это нужно проверить}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}(z, e_i) \right) e_i, e \right) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}(z, e_i) \right) \underbrace{(e_i, e)}_{\text{число}} =$$

$$= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (z, e_i) (e_i, e) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (z, e_i) e_i, e \right) = \mathbb{E}(z, e) \quad \text{т.т.р.}$$

Корреляционный оператор

случайного вектора ξ

Σ_ξ — оператор.

σ_Σ

$$\Sigma_\xi : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n$$

$$\Sigma_\xi x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\xi(\xi, x)) \quad \forall x \in \mathcal{R}_n$$

$$\mathbb{E} \xi(\xi, x)$$

Σ_ξ неотрицательно определен

$$(\Sigma_\xi x, x) = (\mathbb{E} \xi(\xi, x), x) =$$

$$(\Sigma_\xi x, x) \geq 0$$

$$= \mathbb{E}(\xi(\xi, x), x) = \mathbb{E}((\xi, x)(\xi, x)) = \mathbb{E}(\xi, x)^2 \geq 0,$$

$$\text{т.к. } (\xi, x)^2 \geq 0$$

квадратичная форма
по x

Σ_z самосопряжённый

$$(\Sigma_z x, y) = (x, \Sigma_z y)$$

$$(\Sigma_z x, y) = \mathbb{E}((z, x)(z, y)) = \mathbb{E}((z, y)(z, x)) = (\Sigma_z y, x) \quad \text{с.т.р.}$$

Корреляционная матрица

Это матрица корреляционных операторов

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ

$$(\Sigma_z e_i, e_j) = (\mathbb{E} \{ (z, e_i) \}, e_j) = \mathbb{E} \underbrace{(z, e_i)}_{\xi_i} \underbrace{(z, e_j)}_{\xi_j} = \mathbb{E} \xi_i \xi_j = \text{корреляция сдв. величин}$$

$\xi_i = (z, e_i)$
 $\xi_j = (z, e_j)$

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} E_{z_1 z_1} & E_{z_1 z_2} & \dots \\ E_{z_1 z_2} & E_{z_2 z_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & E_{z_n z_n} \end{pmatrix}$$

Дисперсии случайных $z_1, \dots, z_n$

Ковариационные оператор и матрица

$$\sigma_z \stackrel{\text{def}}{=} \sum (z - E z)$$

$$\sigma_z^x = E \left((z - E z) (z - E z, x) \right)$$

ко-
вариация

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} E(z_1 - E z_1)^2 & E(z_1 - E z_1)(z_2 - E z_2) & \dots \\ E(z_1 - E z_1)(z_2 - E z_2) & E(z_2 - E z_2)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ковариация
 z_1 и z_2

Среднее значение квадрата нормы сумм. вектора

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|z\|^2 &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} z_i^2 = \text{сумма диагональных элементов} \\ &\quad \text{матрицы оператора } \Sigma_z \text{ в ОНБ} \\ &= \text{tr } \Sigma_z = \text{след оператора } \Sigma_z \end{aligned}$$

Баус Каррукена - Лозла

то собственный баус корреляционного оператора.

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^k (z, e_i)^2 \sim \max_{e_1, \dots, e_k \text{ - ОНБ}}$$

$\forall k$ решение этой задачи ест. баус $k-1$.