

Линейный оператор свёртки

$$\underline{f * g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

$f - f(x)$, $g - \text{ядро свёртки}$.

$$A g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

$f - \text{ядро свёртки}$
 $A - \text{оператор свёртки}$

A линейн

$$A (\alpha g_1 + \beta g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) (\alpha g_1(x-y) + \beta g_2(x-y)) dy = \alpha A g_1 + \beta A g_2$$

Синусное представление спектра

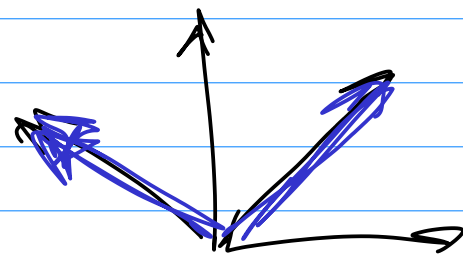
Синт. функции спектра - это функции Фурье.

$$\begin{cases} \sin(\omega x + \varphi) \\ \cos(\omega x + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{cases}$$

м. синт. функ.

или соотв. орто и их
синт. число



Лев. синт. функ.

$$\begin{cases} \sin(\omega x + \varphi) \\ \cos(\omega x + \varphi) \end{cases}$$

зависит от
фазы спектра
 f

Отсюда спектр f зависит синт. числ. спектра A и
фазы φ правых и левых синт. векторов.

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$$

$$A e^{i\omega x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy = e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

формула Эйлера.

$\hat{f}(\omega)$ — значение Фурье-образа
функции f

$$f(\omega) = \underbrace{|\hat{f}(\omega)|}_{\text{амплитуда Фурье-образа функции } f} e^{i\varphi(\omega)} \text{ — фаза Фурье-образа.}$$

$\hat{f}(\omega)$ — комплексное
значение

$|\hat{f}(\omega)|$ — модуль —
вещественная величина.

$\varphi(\omega)$ — фаза — веществ.

$$\begin{aligned} A e^{i\omega x} &= |\hat{f}(\omega)| e^{i(\omega x + \varphi(\omega))} \\ \text{Re} \left[\int A \cos \omega x \right] &= |\hat{f}(\omega)| \cos(\omega x + \varphi(\omega)) \\ \text{Im} \left[\int A \sin \omega x \right] &= |\hat{f}(\omega)| \sin(\omega x + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$

Правый син. базис

$$\cos \omega x$$

$$\sin \omega x$$

Левый

$$\cos(\omega x + \varphi(\omega))$$

$$\sin(\omega x + \varphi(\omega))$$

Син. русо

$$\left| \hat{f}(\omega) \right|$$

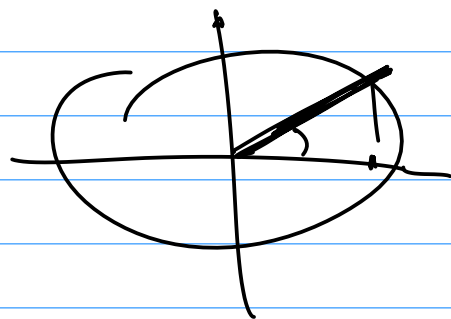
Пускай $\varphi(\omega) = ?$

$\sin \omega x$ — нечётная ф-ция
 $\cos \omega x$ — чётная ф-ция

чётно: $f(-x) = f(x)$



разложение f в интеграл
 Фурье при $\sin \omega x$ коэф.
 Фурье нулевые, т.е.



$$\varphi(\omega) \equiv 0 \quad \forall \omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y)}_{\text{чёт}} \underbrace{\cos \omega y}_{\text{чёт}} dy - i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y)}_{\text{нечёт}} \underbrace{\sin \omega y}_{\text{нечёт}} dy =$$

первый член — число (нечётная сумма чётных)

Четн. выпр

$\mu,$
 $\cos \omega x$
 $\sin \omega x$

Неч

$\pm \cos \omega x$
 $\pm \sin \omega x$

С.числа

$|\hat{f}(\omega)|$

обращает $\Rightarrow$ соот. Фурье.

Нечётное выпр: $f(x) = -f(-x)$

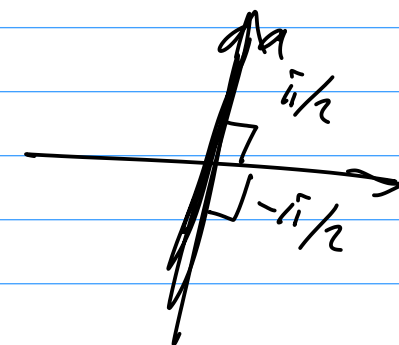
$\varphi(\omega) = \pm \pi/2$

$\hat{f}(\omega)$ — чистое число

$\cos \omega x$
 $\sin \omega x$

$\pm \sin \omega x$
 $\pm \cos \omega x$

$|\hat{f}(\omega)|$



Случайный вектор и его мат. ожидание

Случ. величина

$$\underline{P}: \underline{F} \rightarrow [0, 1]$$

σ-алгебра подмножеств
множества Ω элем. событий

$$\underline{F} = \{\emptyset, \Omega, \dots\}$$

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cap B = \emptyset.$$

$(\underbrace{\Omega}_{\substack{\uparrow \\ \text{множ.} \\ \text{"случ." факторы}}}, \underbrace{\underline{F}}_{\substack{\text{кол. "атрибутов" этого множества}}}, P)$ — вероятностное пр-во

Случ. величина — это функция $\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\uparrow$ это важно

Значение $\zeta(\omega)$ случайной величины ζ зависит от того, какое элем. событие $\omega \in \Omega$ реализуется.

удовлетворяющая условию

$$\rightarrow \{\omega: \zeta(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, $\{\omega: \zeta(\omega) < x\}$ измеримо ($\mathcal{F}$ -измеримо, $\mathcal{P}$ -измеримо)
 $\forall x$.

$\Rightarrow$ Условие, необх. и достаточное для $\exists$ ^{функции} распределения случай. вел. ζ :

$$\mathbb{P}_{\zeta}(x) = \mathbb{P}(\{\omega: \zeta(\omega) < x\}) = \mathbb{P}\{\zeta(\omega) < x\} = \mathbb{P}\{\zeta < x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$$

$\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских множеств — минимальное по включению σ -алгебра, содержащее все интервалы $(-\infty, x)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega: z(\omega) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{B}, \text{ если } z - \text{суп. фнк.}$$

$\mathbb{P}$ — распредел. ζ