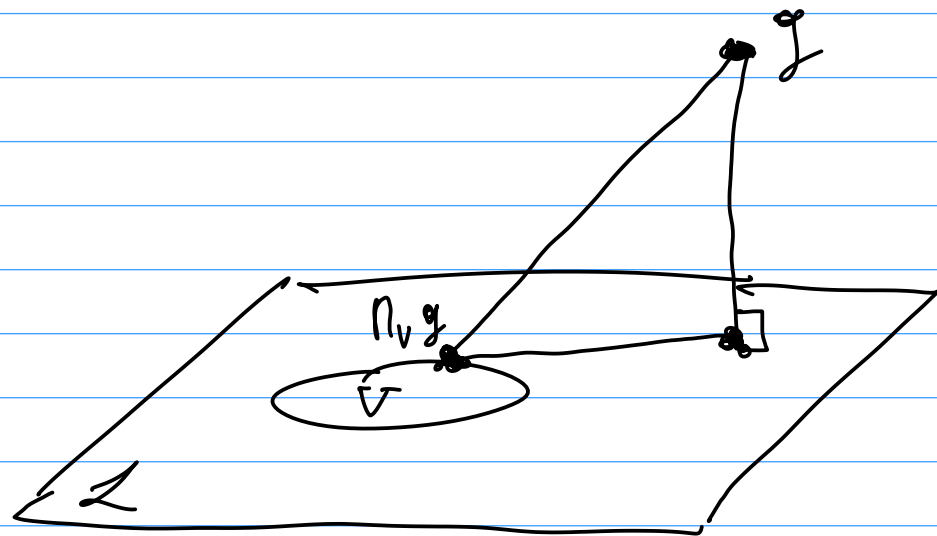


$$\|f - g\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

Оператор проектора на V и проектора на $Z \supset V$



P_V — проектор на V в исходном ор.-б.
изображений $L^2_\mu(X)$

$$P_V : L^2_\mu(X) \rightarrow V$$

P_Z — проектор на Z в исходном ор.-б.
изображений $L^2_\mu(X)$

$$P_Z : L^2_\mu(X) \rightarrow Z$$

P_V^Z — проектор на V в подпространстве Z
 $P_V^Z : Z \rightarrow V$

Теорема

$$P_V = P_V^Z P_Z$$

$\forall$ функционал g из линейного пространства V и $\forall$ подпростран. $Z \supset V$

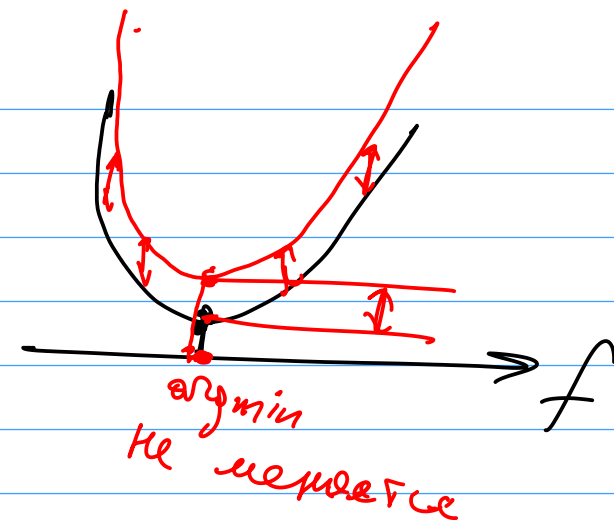
Доказ.

$$\|g - f\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

$$g = P_L g + g_\perp \quad - \text{ортогон. разложение устр. } g$$

$$\| \underbrace{P_L g}_{\in L} + \underbrace{g_\perp}_{\in L^\perp} - \underbrace{f}_{\in L} \|^2 = \| (P_L g - f) + g_\perp \|^2 = \| P_L g - f \|^2 + \| g_\perp \|^2 \sim \min_{f \in V}$$

не зависит от выбора f



Эквивалентная задача: $\|P_L g - f\|^2 \sim \min_{f \in V}$ — задача проецирования

устр. $P_L g \in L$ на множество $V \subset L$ всё проецируется на L

Решение любой задачи является $P_V P_L g = P_V g \quad \forall g.$

$$\|P_V g - g\|^p \leq \varepsilon$$

$$\|P_V g - g\|^p > \varepsilon$$

аналитически

$$P_V g = \sum_{i=1}^n \frac{(g, \chi_i)}{\|\chi_i\|^2} \chi_i$$

численно с использованием метода наименьших квадратов

задачи оптимизации

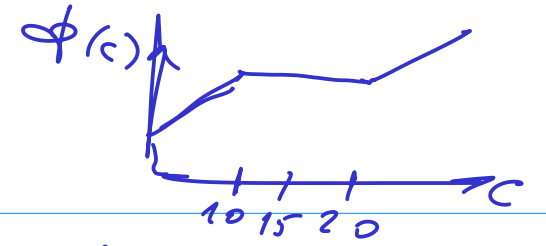
$$\|g - f\|^2 \rightarrow \min_{f \in V}$$

Для более сложных V .

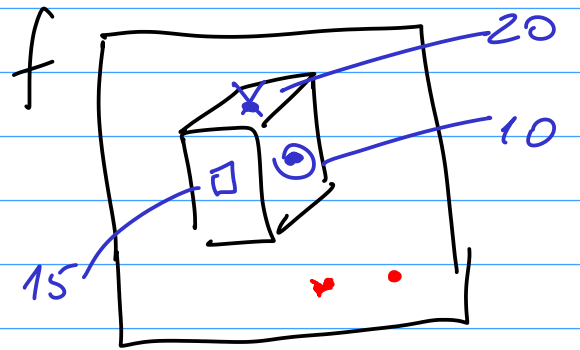
в виде нейронной сети

может быть построена с использованием метода машинного обучения.

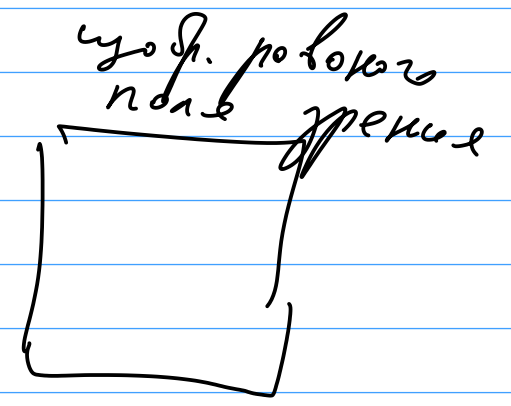
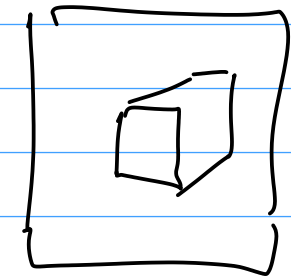
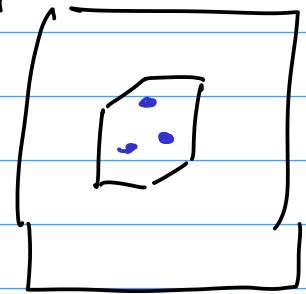
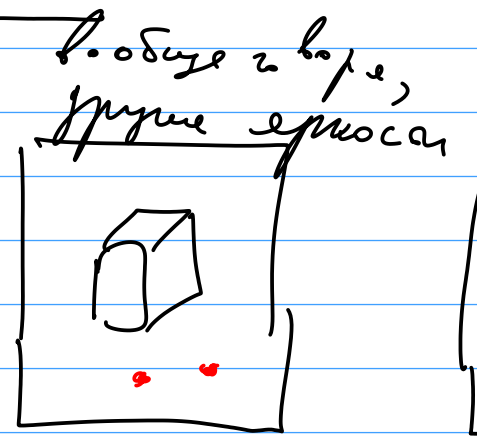
Сравнение изображений по форме



$\phi(10) = \phi(20) = 20$



$g \in \bar{V}_f$



$\bar{V}_f$ - форма изображения f : $V_f = \{\Phi \circ f \mid \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

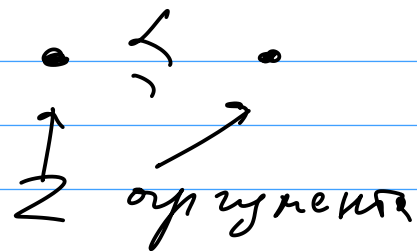
В $\bar{V}_f$ входит изображение, не более сложное, чем f .

Отношение $\preceq$ — "не сложнее по форме, чем":

$g \preceq f \iff g \in \bar{V}_f$

Отношение (relation)

$\preceq$ — бинарное отношение



Функция 2-ух аргументов (в каждом случае — выражение из $\mathcal{L}_P(X)$),
принимаяющая два значения 0 или 1

“ложь” “истина”

$$\preceq : \mathcal{L}_P(X) \times \mathcal{L}_P(X) \rightarrow \{0, 1\}$$

$\preceq$ — отношение

линейного

порядка на $\mathbb{R}$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

либо

$$a \leq b,$$

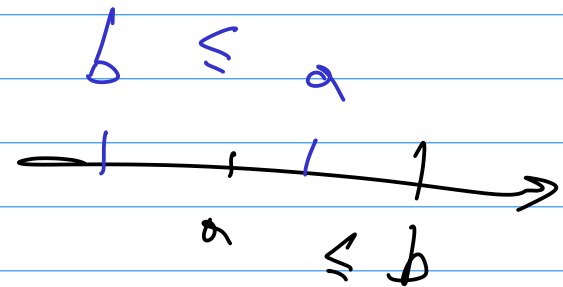
1

либо $b \leq a$

1

$\forall$ два числа $\in \mathbb{R}$

(нет 3-го варианта:
 $a \neq b, b \neq a$)



Отношение полного порядка:

любых элементов $a \not\leq b$, $b \not\leq a$
 a и b не сравнимы

Отношение порядка действительных чисел

$$a = (a_1, a_2) \quad b = (b_1, b_2)$$

$$a \leq b \iff \begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq b_2 \end{cases}$$

Пример не сравнимых пар:

$$a = (1, 0) \quad b = (0, 1)$$

Линейный, полный

partial order

poset — partially ordered set

УМ — частично упор. мн-во

сопоставлен;
 $a \leq b, b \leq a \Leftrightarrow a = b$

Предпорядок (иногда порядок)

preorder

Нарушается ч-во

~~$a \leq b, b \leq a \Leftrightarrow a = b$~~

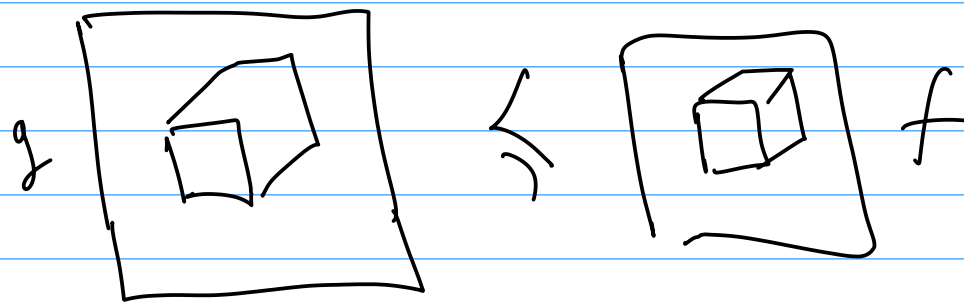
Остается транзитивность:

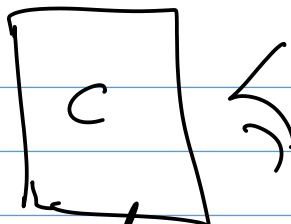
$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Отношение, не сохвещ по форме, тем является предпорядком.

Изображения, сравнимы по форме:

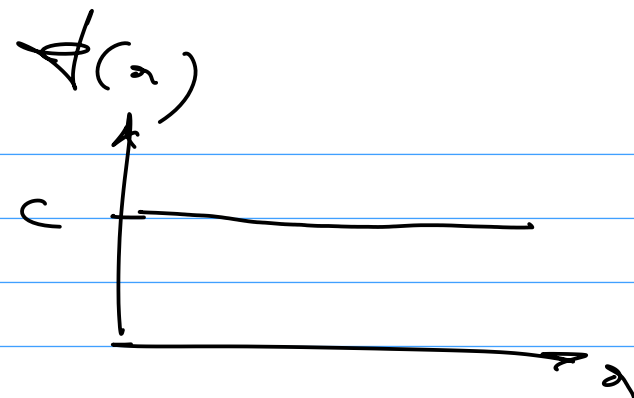
$g \leq f$



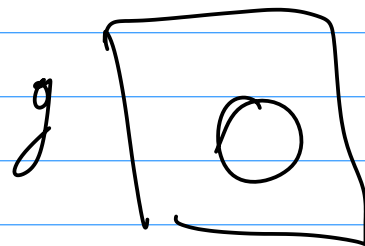
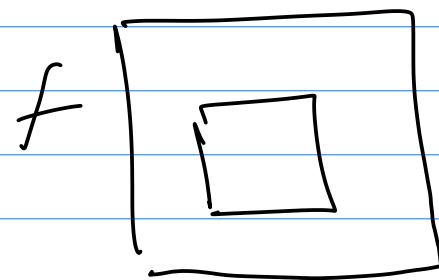

 образ
 изобр. любого
 не времени
 c - значение
 всех аргументов

$$\phi(a) = c \quad \forall a, \text{ где}$$

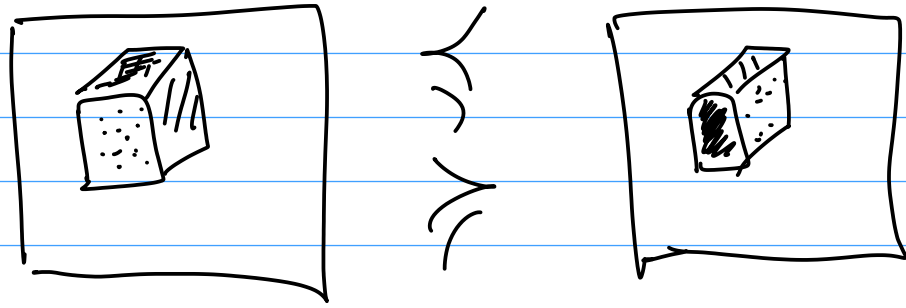
$$\phi \circ f(x) = c \quad \forall x, \forall f.$$



Изображ., не сравнимые по форме: $g \not\sim f$, $f \not\sim g$:



Упорядоченные $f \neq g$, но $f \leq g, g \leq f$:



Взаимодействие между отношениями "не сложнее по форме, чем" $g \leq f$ и

отношение $\subset$: $V_g \subset V_f$. $\forall h \in V_g, h \in V_f$

Теорема

$g \leq f \Leftrightarrow V_g \subset V_f$

Доказательство

Пусть

$g \leq f$.

Докажем, что

$V_g \subset V_f$

$g \leq f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$g \in V_f = \{ \Phi \circ f \mid \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$

$V_g = \{ \Phi' \circ g \mid \Phi': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \Rightarrow \forall \text{ вып. } h \in V_g \text{ имеет вид}$

$h = \Phi' \circ g$ для некоторого $\Phi': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exists \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g = \phi \circ f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \phi' \circ \phi \circ f = \phi'' \circ f, \text{ yes}$$

$$\phi''(c) \stackrel{\text{def}}{=} \phi'(\phi(c)) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Inverse, $h \in V_f$, i.e. $h = \phi' \circ f$, $\phi'': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$