

Проекция на линейную оболочку $L(e_1, \dots, e_N)$ системы ортогональных векторов $\{e_1, \dots, e_N\}$.

g — век.

$$V = L(e_1, \dots, e_N)$$

$e_1, \dots, e_N$ — ортонорм.

$$V^\perp = ?$$

$$P_V g = ?$$

один вопрос
допускает
и другую

$$P_V g = \sum_{i=1}^N (g, e_i) e_i / \|e_i\|^2 \quad ?$$

$$g = g_V + g_{V^\perp}$$

$\begin{pmatrix} P_V \\ P_{V^\perp} \end{pmatrix} g$

Докажем, что при условии $P_V g$ можно получить 1
лучше прояснить по $e_1, \dots, e_N$

$P_V g \in V$ по определению. $V = L(e_1, \dots, e_N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P_V g = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \rightarrow \left\{ \alpha_i \right\}_{i=1}^N$

work, unless $n_v g = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ $| (\cdot, e_j)$

$$(n_v g, e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, e_j)$$

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|e_j\|^2, & i = j \end{cases} = \delta_{ij} \|e_j\|^2$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \|e_j\|^2 = \alpha_j \|e_j\|^2$$

$$(n_v g, e_j) = \alpha_j \|e_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = \frac{(n_v g, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

$\uparrow$ i.k. $e. \in V = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$

$$n_v = n_v^* \Rightarrow (n_v g, e_j) = (g, n_v e_j) = (g, e_j), \text{ i.k. } n_v e_j = e_j$$

Now: $P_V g = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$

$$\alpha_i = \frac{(g, e_i)}{\|e_i\|^2}$$

$\Rightarrow$

$$P_V g = \sum_{i=1}^n \frac{(g, e_i)}{\|e_i\|^2} e_i$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - g \right\|^2 \sim \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \dots$$

$= 0$ — система лн.
связи α_i

с грани условиями

$$P_V: L^2_r(X) \rightarrow L^2_r(X)$$

$$e_i \in L^2_r(X) \quad \nabla \subset L^2_r(X)$$

$$e_i \in \nabla \subset L^2_r(X)$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

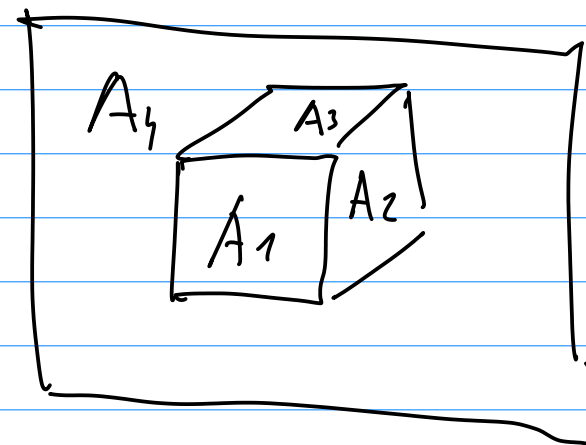
Привести к формуле линейного изображения

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \chi_i \mid c_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}(\chi_1, \dots, \chi_N) \quad \text{— лин. оболочка } \chi_1, \dots, \chi_N$$

χ_i — индикаторные ф-ции областей разбиения пространства

$A_1, \dots, A_N$

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_i \end{cases} \quad x \in X$$



$\mathbb{1}_{A_i}$

$$i \neq j: (\chi_i, \chi_j) =$$

$$\int_X \chi_i(x) \chi_j(x) d\mu(x) = \int_X 0 d\mu(x) = 0 \quad \text{— ортогональность}$$

т.к. $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P_V g = \sum_{i=1}^N \frac{(g, \chi_i)}{\|\chi_i\|^2} \chi_i$$

— формула ортогонального
проецирования
линейного оператора $L(e_1, \dots, e_N)$

Пример:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_f$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

как будет выглядеть $P_V g$?

визуально это будет
вектор (возможно дел
некоторых значений)
проекции вектора g на
линию, которую образует f .

Визуальное представление проекции $P_V g$ — «население» от
изображения, на форму которого проецирует P_V .

$$(g, \chi_i) = ?$$

$$(g, \chi_i) = \int_{\bar{X}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{при } x \notin A_i \\ \searrow 0}} \underbrace{\chi_i(x)}_{\substack{\text{при } x \in A_i \\ \nearrow 1}} d\mu(x) = \int_{A_i} g(x) d\mu(x)$$

$$\int_{A_i} g(x) d\mu(x) \stackrel{\text{сум}}{=} \sum_{x \in A_i} g(x) \underbrace{\mu(\{x\})}_{\substack{\searrow 1}} = \sum_{x \in A_i} g(x)$$

Сумма значений
функции g
по области A_i

$$c_i = \frac{(g, \chi_i)}{\|\chi_i\|^2} = \frac{\text{суммарная сумма значений}}{\text{кол-во значений}} = \text{средняя сумма значений по области } A_i$$

P_{V_j} — это отображение с областями постоянной яркости A_i
 A_i берется из формы V , на которую проецируется P_V .
 Яркость проекции P_{V_j} — это средняя яркость изобр. j
 на областях A_i

f, V_f

