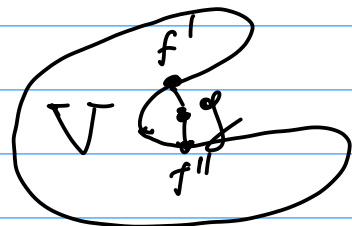
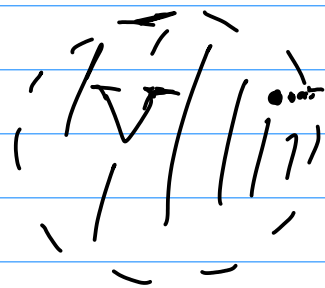
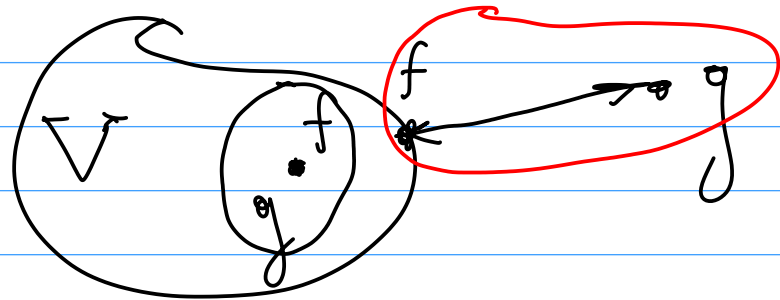


Задача аппроксимации (наименьшее приближение)

$$g \in V \Leftrightarrow \min_{f \in V} \|g - f\|^2 = 0$$

Задача аппроксимации



$g \notin V$ не принадлежит $\Rightarrow$ может не $\exists$ реш. задачи аппроксимации.

V не линейно $\Rightarrow$ решение может быть не единственным.

Теорема $\forall$ замкнутого замкнутого множества V
 решение задачи аппроксимации

$$\|g - f\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

f и единственно $\forall g \in L^2_r(X)$.

Проекцией называется отображение $g \in L^2_r(X)$ на функцию $V \subset L^2_r(X)$
 решение задачи аппроксимации;

$$f_* = \arg \min_{f \in V} \|g - f\|^2$$

↑ проекция g на V

Если V л.н. и замкнуто, то существует ортогональное проекция, которое каждому $g \in L^2_r(X)$
 ставит в соответствие его проекцию $f_* \in V$, т.е. ортогональная ϕ -функция

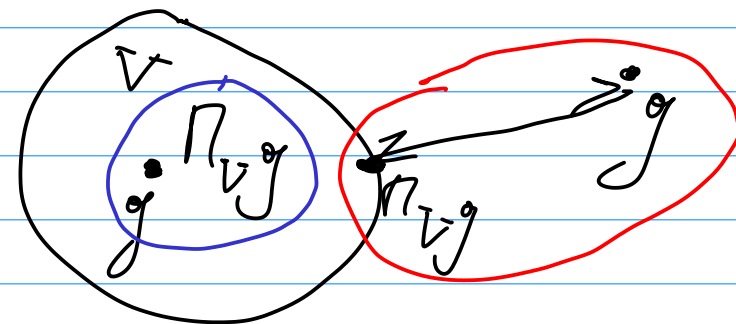
$$\Pi_V : L^2_r(X) \rightarrow V \quad \Pi_V g = \arg \min_{f \in V} \|g - f\|^2$$

Π_V — оператор проектирования на V ,
 (projection)

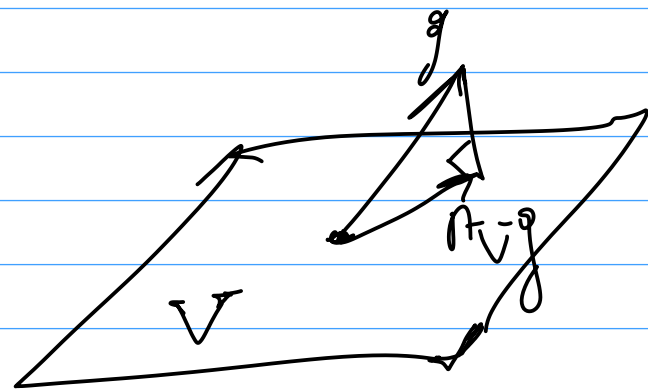
$\Pi_V g$ — проекция g на V (значение проектора,
 результат действия проектора на
 конкретное изображение g).

$g \in V$? $\Leftrightarrow$ $\|g - \Pi_V g\|^2 = 0$?

$\dots \leq \varepsilon$



Ортонормальный базис и линейное подпространство



Линейность Π_V

$$\Pi_V(\alpha g_1 + \beta g_2) \stackrel{?}{=} \alpha \Pi_V g_1 + \beta \Pi_V g_2$$

Теорема об ортонормальном разложении

$$\mathcal{L}_r^2(X) = V \oplus V^\perp$$

связана с
лин. алгеброй,
функ. анализа.

$$\mathcal{L}_r^2(X) = V + V^\perp \xrightarrow{\text{det}}$$

$\oplus$

$$\mathcal{L}_r^2(X) = \{g_V + g_\perp \mid g_V \in V, g_\perp \in V^\perp\}$$

$$\forall g \in \mathcal{L}_r^2(X) \exists g_V \in V, g_\perp \in V^\perp: g = g_V + g_\perp$$

$\oplus$

— функционально независимые

нормы

$$g_V \cup g_\perp: \exists g, g_V \in V, g_\perp \in V^\perp$$

$\Rightarrow$ связь между проектором Π_V и разложением $g = g_V + g_{\perp}$:
 $\Pi_V g = g_V$, т.е. $\Pi_V g$ — это компоненте g , принадлежащее V .

Это можно показать, используя то:

$$\|g - f\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

$$\|g_V + g_{\perp} - f\|^2 = \underbrace{\|g_V - f\|^2}_{\substack{\in V \\ V \perp}} + \underbrace{\|g_{\perp}\|^2}_{\substack{\in V^{\perp} \\ V \perp}} + 2 \underbrace{(g_V - f, g_{\perp})}_{\substack{\in V \\ \in V^{\perp} \\ \perp \\ 0, \text{ т.к. } \perp}} =$$

$$= \|g_V - f\|^2 + \|g_{\perp}\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

$\underbrace{\|g_{\perp}\|^2}_{\substack{\text{не зависит} \\ \text{от } f}}$

$$\Leftrightarrow \|g_V - f\|^2 \sim \min_{f \in V}$$

эквивалентно
показ

Реш: $f = g_V$

$$\|g_V - g_V\|^2 = 0$$

Попробуем: $\boxed{g = P_V g + g^\perp}$ — ортогональное разложение g .

Ортогональный проектор P_V — линейный оператор с ортогональным разложением.

Линейно

$$\begin{aligned} \alpha g_1 + \beta g_2 &= P_V g_1 + g_1^\perp + P_V g_2 + g_2^\perp \\ g_1 &= P_V g_1 + g_1^\perp \\ g_2 &= P_V g_2 + g_2^\perp \end{aligned}$$

То самое $\alpha g_1 + \beta g_2$ и $V^\perp$ (см. связь проектора с орт. разл.)

$\in V$ $\in V^\perp$ $\downarrow$ $\text{соединяет } L(X) = V \oplus V^\perp$
единственность разл.

$$\alpha g_1 + \beta g_2 = (\alpha P_V g_1 + \beta P_V g_2) + (\alpha g_1^\perp + \beta g_2^\perp)$$

разложение $\alpha g_1 + \beta g_2$ на орт. части

$$\text{Т.е. } \Pi_V (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \Pi_V g_1 + \beta \Pi_V g_2$$

т.е. линейность оператора Π_V .

Свойство ортогональности Π_V

Определение сопр. оператора Π_V^* : $\forall g, f \quad (\Pi_V g, f) = (g, \Pi_V^* f)$

$$(\Pi_V g, f) = (\Pi_V g, \Pi_V f + f_\perp) = (\Pi_V g, \Pi_V f) + (\Pi_V g, f_\perp) =$$

$\underbrace{g \in V}_{\substack{\text{можно ли здесь} \\ \text{использовать} \\ \Pi_V^*?}}$
 $\underbrace{f_\perp \in V^\perp}_{\substack{= 0 \text{ так как } 1}} = 0$

$$= (\Pi_V g, \Pi_V f) = (\Pi_V g, \Pi_V f) + \underbrace{(g_\perp, \Pi_V f)}_{=0} = (\Pi_V g + g_\perp, \Pi_V f) = (g, \Pi_V f), \text{ т.е.}$$

Спектральное разложение Π_V

Задача на собственные векторы и соб. значения.

$$\Pi_V g = \lambda g \quad \text{— какие } g? \quad \lambda \text{ удовл. тому}$$

$\Pi_V = \Pi_V^* \Rightarrow$ у него есть "полный набор" с. век. и с. значений.
у с. век. можно построить ОНБ $L^2_\mu(\tilde{X})$.

$$g \in L^2_\mu(\tilde{X}) \quad g = g_V + g_\perp \Rightarrow \Pi_V g = g_V \neq g \text{ вообще говоря.}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \bullet \quad \forall g \in V & \Pi_V g = 1 \cdot g \quad \text{— любое } g \in V \text{ является соб. век. } \Pi_V \\ & \text{с соб. значением } 1. \\ \bullet \quad \forall g \in V^\perp & \Pi_V g = 0 \cdot g \quad \text{— любое } g \in V^\perp \text{ явл. соб. век. } \Pi_V \\ & \text{с соб. значением } 0 \end{array} \right.$$