МГУ имени М. В. Ломоносова • Физический факультет
Кафедра математического моделирования и информатики

Использование качественной субъективной информации в форме «мягких» неравенств для решения некорректно поставленных обратных задач

Ашарин В. В., Зубюк А. В.

http://NeuroFuzzy.phys.msu.ru

Семинар "Нечеткие системы и машинное обучение", 12 декабря 2019 г.

Постановка задачи

Пусть решается обратная задача оценивания “сигнала” $f \in \mathcal{R}_n$ (n-мерный вектор евклидова пространства $\mathcal{R}_n$) по “измерениям” $\xi \in \mathcal{R}_m$ (m-мерный вектор евклидова пространства $\mathcal{R}_m$) которые связаны следующим соотношением: $\xi = Af + \nu$, где A линейный оператор $\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$, а ν случайный шум со значениями в $\mathcal{R}_m$. Согласно методу наименьших квадратов оценку сигнала f можно выразить следующим образом:

$$\arg\min_g \|Ag - \xi\|^2 = A^- \xi, \tag{1}$$

где A^- матрица псевдообратная к A.

Некорректность

Известно, что (1) некорректно поставленная задача, если оператор A имеет "малые" или равные нулю сингулярные числа и известен приблизительно, т.е. дан оператор $A' \approx A$ вместо A, тогда оценка $A'^{-}\xi$ может сильно отличаться от искомой $A^{-}\xi$. В некоторых случаях эта разница может быть довольно высокой, даже если A' очень близка к A:

$$\|A'^{-}\xi - A^{-}\xi\| \xrightarrow[A' \to A]{} \infty.$$

Ядро A^{-} может быть определено в пространстве Фурье-образов как

$$FA^{-}(\omega) = \begin{cases} 1/FA(\omega), & FA(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По теореме о свёртке $F(g \star h)(\omega) = Fg(\omega)\; Fh(\omega)$ для любых функций g и h.

Фурье преобразование

С учётом этого имеем:

$$\hat{f} = F^{-1} F \hat{A}^{-} F \xi,$$

$$F\hat{A}^{-}(\omega) = \begin{cases} 1/F\hat{A}(\omega), & F\hat{A}(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (2)$$

где F^{-1} означает обратное преобразование Фурье. Дополним это условием близости $\hat{A} \approx A'$ в виде

$$FA'(\omega) - \varepsilon' \leq F\hat{A}(\omega) \leq FA'(\omega) + \varepsilon', \quad \forall \omega,$$

Разбиение частотной области

Выбрав некий порог $\varepsilon > 0$, мы можем разделить всю частотную область на две части:

$$\Omega_1 \triangleq \{\omega : \ |FA(\omega)| \geq \varepsilon\}, \quad \Omega_2 \triangleq \{\omega : \ |FA(\omega)| < \varepsilon\}.$$

Если ν - погрешность преобразования Фурье, то при восстановлении сигнала мы имеем следующее

$$\frac{F\xi(\omega)}{FA(\omega)} = \frac{FA(\omega)Ff(\omega) + \nu}{FA(\omega)} = Ff(\omega) + \frac{\nu}{FA(\omega)}.$$

Соответственно, если $|\nu| \ll \varepsilon$, то в области Ω_1 погрешность восстановления пренебрежимо мала: $|\nu|/|FA(\omega)| \leq |\nu|/\varepsilon \approx 0$. А вот в области Ω_2 погрешность оказывает значительное влияние на результат восстановления, что мы и наблюдаем.

Разбиение оценки сигнала

Будем искать оценку $\hat{f}$ сигнала f в виде суммы ортогональных сигналов

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2,$$

где $F\hat{f}_1(\omega) = 0$ при $\omega \in \Omega_2$, $F\hat{f}_2(\omega) = 0$ при $\omega \in \Omega_1$. Ортогональность тут очевидна:

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2) = \int\limits_X \hat{f}_1(x)\hat{f}_2(x)dx = \int\limits_\Omega F\hat{f}_1(\omega)F\hat{f}_2(\omega)d\omega = 0.$$

Оценку $\hat{f}_1$ построим просто как

$$F\hat{f}_1(\omega) = F\xi(\omega)/FA(\omega), \quad \omega \in \Omega_1.$$

Учет «мягких» неравенств

В области Ω_2 мы восстановить сигнал на основе ξ не сможем из-за погрешности, поэтому будем считать величины $F\hat{f}_2(\omega)$ произвольными при $\omega \in \Omega_2$ и будем их подбирать так, чтобы наилучшим образом удовлетворить "мягкие"неравенства.

$$\hat{f}_2 = \sum_{\omega \in \Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Re}} F^{-1} \delta_\omega^{\mathrm{Re}} + \sum_{\omega \in \Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Im}} F^{-1} \delta_\omega^{\mathrm{Im}}$$

Учтем также субъективную информацию эксперта о виде сигнала, например о его монотонности:

$$\hat{f}^{i+1} \gtrsim \hat{f}^i$$

Учет «мягких» неравенств

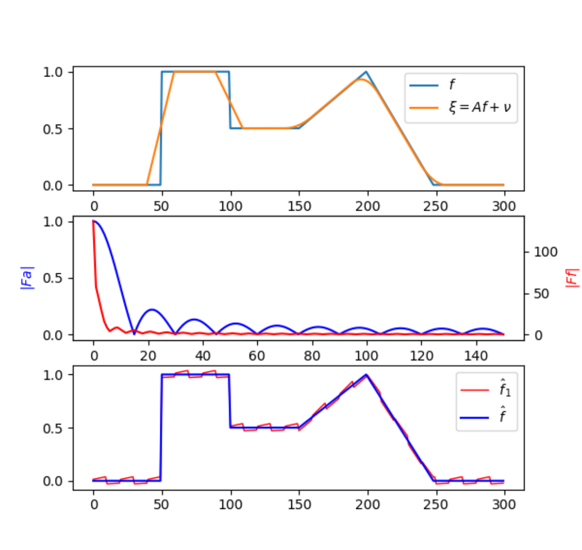
Данная задача сводится к задаче линейного программирования. В итоге получаем:

$$\begin{cases} z \sim \max\limits_{\beta_1, \ldots, \beta_n, z}, \\ \hat{f}^{i+1} - \hat{f}^{i} \geq z, \end{cases}$$

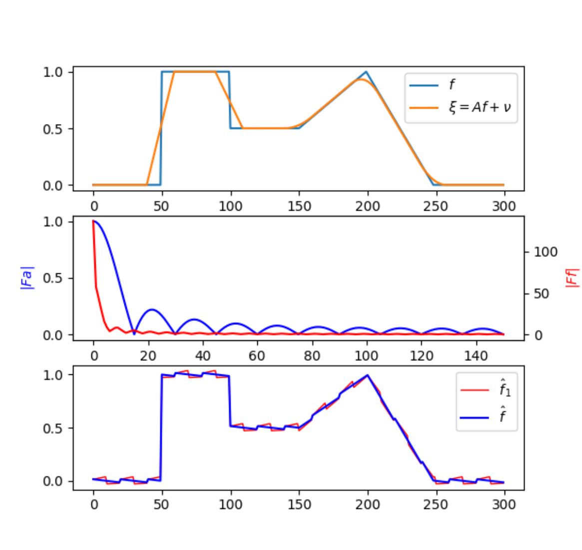
где с учетом наших допущений:

$$\hat{f}^{i+1} - \hat{f}^{i} = \hat{f}_1^{i+1} - \hat{f}_1^{i} + \hat{f}_2^{i+1} - \hat{f}_2^{i} = (F^{-1}(F(\omega)/Fa(\omega)))^{i+1} - (F^{-1}(F(\omega)/Fa(\omega)))^{i} + \left(\sum_{\omega\in\Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Re}} F^{-1}\delta_\omega^{\mathrm{Re}} + \sum_{\omega\in\Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Im}} F^{-1}\delta_\omega^{\mathrm{Im}}\right)^{i+1} - \left(\sum_{\omega\in\Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Re}} F^{-1}\delta_\omega^{\mathrm{Re}} + \sum_{\omega\in\Omega_2} c_\omega^{\mathrm{Im}} F^{-1}\delta_\omega^{\mathrm{Im}}\right)^{i} \quad (3)$$

Мнение эксперта соответствует действительности

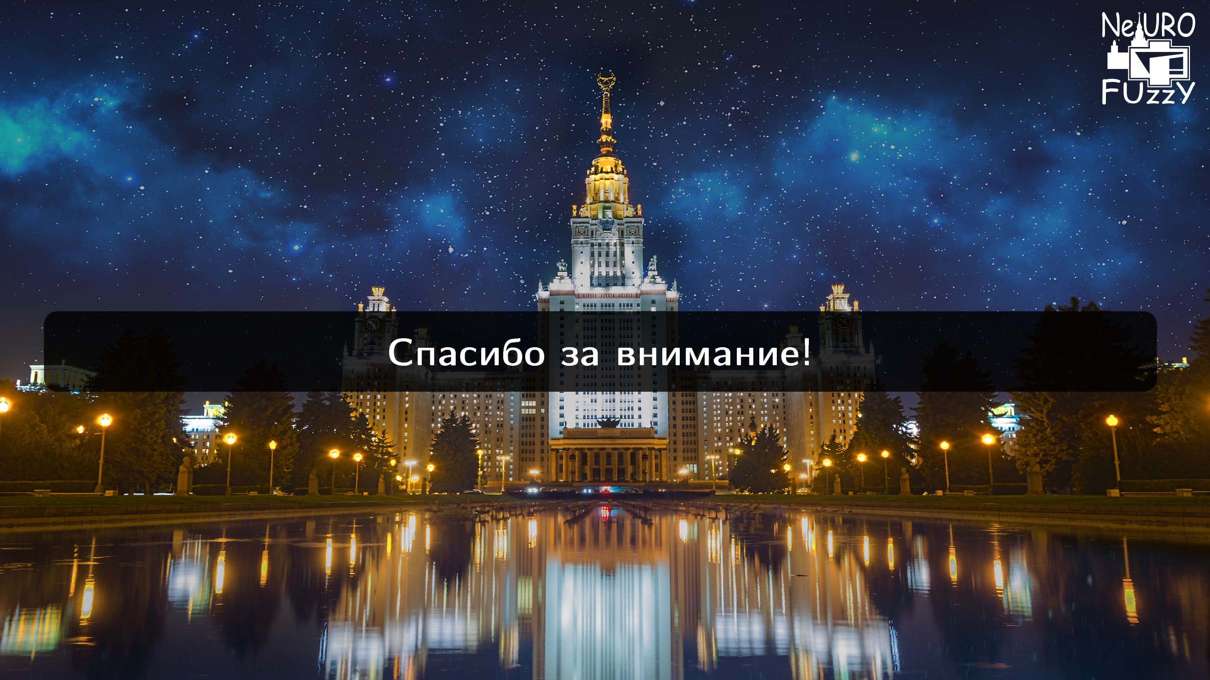


Мнение эксперта не соответствует действительности



Заключение

Из показанных результатов видно, то что модель, учитывающая дополнительную априорную информацию, может давать лучший результат. Далее планируется реализовать метод, улучшающий решение задачи ЛП для случая, когда эксперт ошибается. Рассмотреть условия нелинейных нечетких неравенств, в рамках теории «мягких» неравенств.



Спасибо за внимание!