Использование качественной субъективной информации в виде «мягких» неравенств при оценке состава инвестиционного портфеля

Шапошник Г. Л.

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Кафедра математического моделирования и информатики

Научный руководитель: Зубюк А. В.

31 октября 2019 г.

Введение

Инвестиционная компания — организация, осуществляющая коллективные инвестиции.

Главными функциями инвестиционных компаний являются диверсификация инвестиций и управление инвестиционным портфелем, в который входят ценные бумаги разных эмитентов и другие виды фондовых инструментов.

$\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$ — полное множество доступных ценных бумаг;

$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ — вложенные в них доли капитала;

$\mathbb{I}^* = \{i : \beta_i > 0\} \subset \mathbb{I}$ — фактическое подмножество активов

Введение

Долевая струтура портфеля $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является коммерческой тайной. В то же время, знание состава портфеля очень важно для инвесторов.

Инвестиционная компания обязана периодически отчитываться о своей доходности. Необходимо использовать эту информацию для оценивания структуры портфеля.

Постановка задачи Марковица

Портфель Марковица: максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный риск при фиксированной доходности.

Семейство портфелей Марковица – множество Парето для двух взаимно противоречащих критериев [2]:

$$\begin{cases} \beta^T \mathbf{G} \beta \to min(\beta \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{I}\beta = 1, \beta \geq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}}^T \beta = const. \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}^T \beta \to max(\beta \in \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{I}\beta = 1, \beta \geq \mathbf{0}, \beta^T \mathbf{G} \beta = const. \end{cases}$$

Объединенный критерий Марковица [2]:

$$\begin{cases} \beta_\alpha = argmin(1-\alpha)\beta^T \mathbf{G} \beta - \alpha \bar{\mathbf{x}}^T \beta, \\ \mathbf{I}\beta = 1, \beta \geq \mathbf{0}, 0 < \alpha < 1. \end{cases} \qquad (1)$$

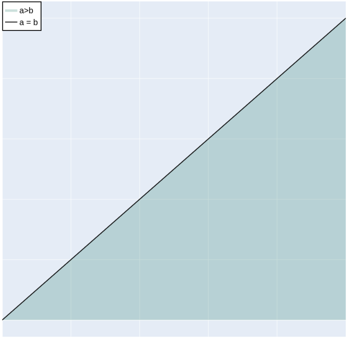
Введение в «мягкие» неравенства

Задача квадратичного программирования (1) имеет бесконечное множество решений. В данной работе предложен метод выбора наиболее вероятного решения на основе качественной субъективной информации о портфеле инвестиционного фонда с помощью мягких неравенств $\beta_{i_k} \gtrsim \beta_{j_k}$, $k = 1, \ldots, s$. В некоторых случаях такую информацию можно получить с помощью эксперта по ценным бумагам.

Определим такое «нечеткое» неравенство как нечеткое отношение на $\mathbb{R}$, т.е как нечеткое подмножество $\mathcal{R}_{\gtrsim}$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В контексте теории возможностей Пытьева [1], $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ нечеткого подмножества $\mathcal{R}_{\gtrsim}$ имеет возможность $\Pi(A) \in [0, 1]$, где интервале $[0, 1]$ это шкала значений возможностей с операциями max и min.

«Четкие» неравенства

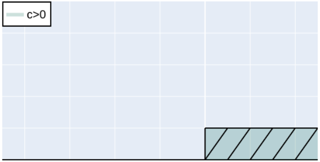
Ведем некоторое утверждение. Путь b не превосходит a, т.е ($a \geq b$), тогда в терминах «четкой» математики это утверждение будет выглядеть следующим образом:



Наше утверждение принимает вид подмножества плоскости.

«Мягкие» неравенства

Пусть $a - b = c \geq 0$, тогда это утверждение можно представить в виде:



Таким образом наше утвеждение принимает вид подмножества прямой.

Пусть теперь b **скорее всего** не превосходит a. Запишем это утверждениее в виде

$$a - b = c \gtrsim 0 \tag{2}$$

Таким образом утверждение принимает вид **нечеткого** подмножества прямой.

Функция $\pi(\cdot) : \mathbf{X} \to [0, 1]$ определяет распределение возможности $\Pi(\cdot) : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \to [0, 1]$ и соответствующее возможностное пространство $(\mathbf{X}, \mathcal{P}, \Pi)$.

В нашем случае множество $\mathbf{X}$ содержит в себе всевозможные подмножества $\mathcal{R}$, которые являются нечеткими подможествами прямой.

Введем функцию одноточечного покрытия:

$$\nu(c) \overset{def}{=} \Pi(\{c \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\}) = \sup\{\pi(\mathcal{R}) | \mathcal{R} : c \in \mathcal{R}\} \quad (3)$$

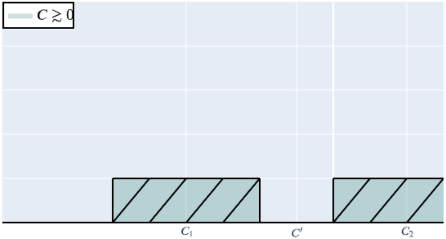
Функция $\nu(c)$ должна быть монотонна, так как если:

$$c' \geq c, \quad c \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0} \Rightarrow c' \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0} \quad (4)$$

или

$$c' \geq c, \quad c \gtrsim 0 \Rightarrow c' \gtrsim 0 \quad (5)$$

Предположим это не так, тогда

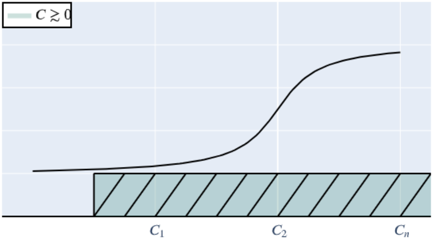


Система «мягких» неравенств

Пусть у нас есть следующая система «мягких» неравенств:

$$\begin{cases} c_1 \gtrsim 0, \\ c_2 \gtrsim 0, \\ \vdots \\ c_n \gtrsim 0, \end{cases} \tag{6}$$

Тогда ее решение можно представить в виде:



Таким образом мы видим, что наша система имеет решение в виде $\min_i c_i$. Выведем возможность с учетом всех выводов сделанных ранее:

$$\Pi(\{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\}) = \Pi(\min_i c_i \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}) = \nu(\min_i c_i) \qquad (7)$$

Запишем условие задачи и попробуем максимизировать возможность того, что коэффициенты $\beta_{i_k} \geq \beta_{j_k}$ или другими словами $\beta_{i_k} - \beta_{j_k} \geq 0$ при $k = 1, \ldots, s$. Тогда учитывая (7) условие примет следующий вид:

Решение с учетом «мягких» неравенства

$$\begin{cases} \nu(\min\{\beta_{i_k} - \beta_{j_k}\}) \sim \max, \quad k = 1, \ldots, s, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Или с учетом того, что функция $\nu(c)$ монотонна:

$$\begin{cases} \min\{\beta_{i_k} - \beta_{j_k}\} \sim \max, \quad k = 1, \ldots, s, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом в этой задаче мы будем максимизировать возможность того, что $\beta_{i_k} \gtrsim \beta_{j_k}$ при заданной доходности.

Преобразование условия на максимум

Для того, чтобы преобразовать в (9) условие на максимум необходимо ввести фиктивную переменную z. В результате это условие примет следующий вид:

$$\begin{cases} z \leq \beta_{i_1} - \beta_{j_1}, \\ \vdots \\ z \leq \beta_{i_s} - \beta_{j_s}, \\ z \sim \max . \end{cases}$$

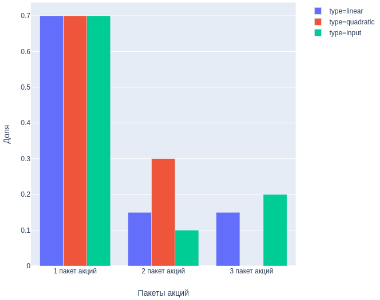
Таким образом система (9) примет вид:

Конечная формулировка

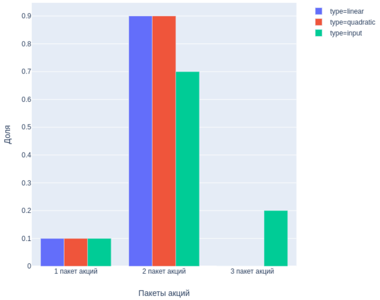
$$
\begin{cases}
z \sim \max, \\
z \leq \beta_{i_1} - \beta_{j_1}, \\
\vdots \\
z \leq \beta_{i_s} - \beta_{j_s}, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n > 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Итак, задача (1) сводится к задаче квадратичного программирования, а задача (10) сводится к задаче линейного программирования.

Результаты

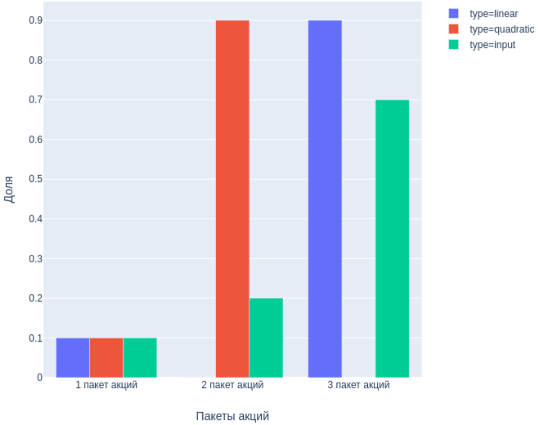


1–больше всех



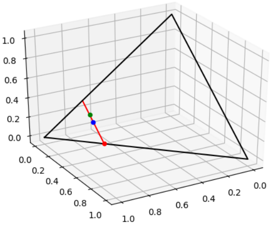
2–больше всех

Результаты

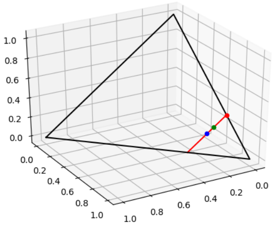


3–больше всех

Результаты

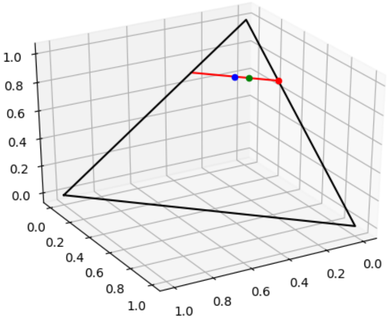


1–больше всех



2–больше всех

Результаты



3–больше всех

Заключение

Из результатов показанных ранее видно, то что модель, которая учитывает дополнительную априорную информацию работает лучше, нежели модель, которая основана на портфельной теории Марковица.

Список литературы

1. Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения.
2. Мотль В. В., Красоткина О. В., Морозов А. О. Оценивание состава инвестиционного портфеля в большом множестве биржевых активов.